

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 8      **UND IHRE GRENZGEBIETE**

S. 337—384

## Algebra und Zahlentheorie.

**Levitzki, Jakob:** On automorphisms of certain rings. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 984—992 (1935).

$R$  sei ein Ring, in dem der Doppelkettensatz für Rechtsideale gilt,  $M$  eine Menge von Ringautomorphismen von  $R$ . Ein Ideal  $A$  heißt normal, wenn es die Automorphismen von  $M$  gestattet. Der Kern von  $A$  besteht aus allen bei  $M$  invarianten Elementen von  $A$ . Der Kern  $K$  von  $R$  ist stets ein Ring mit Radikal, dessen Restklassenring nach dem Radikal halbeinfach ist. Ist  $R$  nilpotent, so gilt in  $K$  der Doppelkettensatz. Ist  $M$  eine endliche Gruppe der Ordnung  $n$  und ist  $na \neq 0$  für jedes  $a$  aus  $R$ , so gelten schärfere Sätze: Die minimalen nichtnilpotenten normalen Ideale  $A$  von  $R$  und die minimalen nichtnilpotenten Ideale  $A'$  von  $K$  entsprechen sich eindeutig; der Kern eines  $A$  ist ein  $A'$ ,  $(A', A'R)$  ist ein  $A$ . Gilt auch im Radikal von  $R$  (als Ring aufgefaßt) der Doppelkettensatz, so gilt er ebenfalls in  $K$  und dessen Radikal. Ist  $R$  halbeinfach, so ist auch  $K$  halbeinfach. *Köthe* (Münster i. W.).

**Zorn, Max:** A remark on method in transfinite algebra. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 667—670 (1935).

Gilt stets  $B_\alpha \subset B_\beta$  oder  $B_\beta \subset B_\alpha$  für zwei Mengen  $B_\gamma$ , so bilden die  $B_\gamma$  eine Kette. Eine Menge  $A$  von Mengen  $B_\gamma$  heißt abgeschlossen, wenn sie mit den Mengen einer Kette stets deren Vereinigungsmenge enthält. Als „Maximumprinzip“ bezeichnet Verf. den Satz, daß ein abgeschlossenes  $A$  wenigstens ein maximales  $B_\gamma$  enthält, d. h. eines, das nicht Teilmenge eines anderen ist. Verf. zeigt die Brauchbarkeit dieses Prinzips für transfinite algebraische Probleme, er beweist damit u. a. ohne Wohlordnungsschlüsse die Existenz und Eindeutigkeit des kleinsten algebraisch abgeschlossenen Körpers über einem gegebenen Körper. *Köthe* (Münster i. W.).

**Hull, Ralph:** Maximal orders in rational cyclic algebras of odd prime degree. *Trans. Amer. Math. Soc.* 38, 515—530 (1935).

Sei  $A$  eine normale Divisionsalgebra vom Primzahlgrad  $n \neq 2$  über dem rationalen Zahlkörper  $R$  und  $\sigma = q_1 \dots q_r$ , das Produkt ihrer  $r (\geq 2)$  verschiedenen Verzweigungsstellen. Es werden folgende Tatsachen bewiesen: Es existieren unendlich viele Primzahlen  $p \equiv 1 \pmod n$  derart, daß  $A = (\sigma, Z_p, S_p)$  ist, wo  $Z_p$  der Teilkörper  $n$ -ten Grades des Körpers der  $p$ -ten Einheitswurzeln über  $R$  und  $S_p$  ein erzeugender Automorphismus von  $Z_p/R$  ist. Für jede solche kanonische zyklische Erzeugung von  $A$  existieren in  $A$  genau  $n$  Maximalordnungen  $I_\nu$  derart, daß der  $\sigma$  entsprechende Operator  $u$  mit  $u^n = \sigma$  und die Maximalordnung von  $Z_p$  in  $I_\nu$  enthalten sind. Diese  $I_\nu$  werden über der Maximalordnung von  $Z_p$  erzeugt durch die Operatoren

$$y_\nu = \frac{1}{p} (\lambda_\nu - u) \beta^{n-1},$$

wo  $\beta$  (fest) durch  $p = (\beta)^n$  in  $Z_p$  definiert ist und  $\lambda_\nu$  die  $n$  Lösungen der Kongruenz  $\lambda^n \equiv \sigma \pmod p$  in  $R$  durchläuft. Die  $I_\nu$  gehen aus einer  $I_0$  durch Transformation mit den Potenzen  $\beta^\nu$  ( $\nu = 0, \dots, n-1$ ) hervor. *Hasse* (Göttingen).

**Jacobson, Nathan:** Rational methods in the theory of Lie algebras. *Ann. of Math.*, II. s. 36, 875—881 (1935).

Eine Liealgebra  $L$  über einem Körper  $F$ , welche aus linearen Transformationen besteht, erzeugt über  $F$  ein assoziatives hyperkomplexes System  $A$ . Das Radikal  $S$  von  $L$  soll das maximale auflösbare Ideal aus  $L$  sein. Verf. zeigt: Ist  $A$  halbeinfach, so ist  $L$  die direkte Summe von einer halbeinfachen Liealgebra  $L_1$  (nämlich  $[LL]$ )



und dem Radikal  $S$ , welches in diesem Fall abelsch ist. Dieser Satz wird auf voll-reduzible Transformationsgruppen angewandt. — Wenn  $L$  auflösbar ist und  $N$  das Radikal von  $A$  bezeichnet, so ist  $A \pmod{N}$  halbeinfach,  $L \pmod{N}$  auflösbar, also abelsch, auch  $A \pmod{N}$  abelsch und  $[LL] \subset N$  nilpotent. Ist  $\mathfrak{R}$  der Darstellungsmodul, so sei  $N^k \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_k$  und  $O = \mathfrak{R}_{s+1} \neq \mathfrak{R}_s \subset \dots \subset \mathfrak{R}_1 \subset \mathfrak{R}$ . Wegen  $A \mathfrak{R}_k \subset \mathfrak{R}_k$  kann man durch passende Basiswahl in  $\mathfrak{R}$  die Matrix  $a$  des allgemeinen Elements von  $A$  in die Gestalt  $(a_{ik})$  bringen; darin sind die  $a_{ik}$  Matrizen mit  $(\mathfrak{R}_{i-1}/\mathfrak{R}_i)$  Zeilen und  $(\mathfrak{R}_{k-1}/\mathfrak{R}_k)$  Spalten ( $1 \leq i, k \leq s+1$ ) und  $a_{ik} = 0$  für  $i > k$ . Die  $a_{ii}$  liefern Darstellungen von  $A \pmod{N}$  in  $\mathfrak{R}_{i-1} \pmod{\mathfrak{R}_i}$ . In einem Oberkörper  $Z$  von  $F$  kann man diese noch auf Diagonalgestalt bringen und erhält so den Satz von Lie für auflösbare Transformationsgruppen. — Mit rationalen Methoden wird Engels Theorem bewiesen: Ist das charakteristische Polynom von  $L$  in  $\mathfrak{R}$  gleich  $x^n$ , so sind  $A$  und  $L$  nilpotent. — Auch für abstrakte auflösbare Liealgebren  $L$  findet man, daß  $[LL]$  nilpotent ist. — Gilt für alle  $l$  und  $l_1$  aus einer abstrakten  $L[l \dots [l l_1] \dots]] = 0$  mit  $s$  Klammern, so ist  $L$  nilpotent.

W. Landherr (Hamburg).

● Herbrand, J.: Le développement moderne de la théorie des corps algébriques; corps de classes et lois de réciprocité. Mém. Sci. math. Fasc. 75, 72 pag. (1935).

Das Büchlein gibt eine Übersicht über die wichtigsten Sätze und Methoden der Theorie der relativ abelschen Zahlkörper. Die Beweise sind bei dem beschränkten Raum nicht ausgeführt worden, vielmehr werden die Hauptsätze formuliert und die methodischen Zusammenhänge in großen Zügen aufgezeigt. Das Kapitel I enthält eine Übersicht über die Grundlagen der Zahlkörpertheorie: Gruppen, Körper, Galoistheorie, ganze Zahlen, Ideale, Einheiten, Kongruenzen, Idealgruppen und Idealklassen, Diskriminanten- und Verzweigungstheorie, Zetafunktionen und  $L$ -Reihen,  $p$ -adische Zahlen. Das II. Kapitel entwickelt die Theorie der Klassenkörper nach einer methodischen Vorbereitung über Kreiskörper und quadratische Körper. Kapitel III, lois de réciprocité, ist in die vier Abschnitte: Artinsches R.G., Hassesches R.G. (d. i. die Produktformel für das Hassesche Normenrestsymbol), Hilbertsches R.G. (Produktformel für das Hilbertsche Norm.rests.), explizite R.G. und Anwendungen auf den Fermatschen Satz gegliedert. Kapitel IV bringt verschiedene Anwendungen und Ergänzungen: Kroneckers Satz, daß alle absolut abelschen Körper Kreiskörper sind, Konstruktion der Klassenkörper imaginär quadratischer Körper durch die Modulfunktion  $j(z)$  und elliptische Funktionen, Führer-Verzweigungssatz, Verschiebungssatz; ferner den Hauptidealsatz mit den Artinschen Untersuchungen über nichtabelsche Körper (nicht die allgemeinen  $L$ -Reihen). In einem Anhang von C. Chevalley werden die Fortschritte der Theorie seit dem Tode des Verf. kurz besprochen: Die Vereinfachungen der Beweise durch Herbrand-Chevalley und Artin (die Artinsche Methode größter Ausnutzung der analytischen Methoden als der kürzeste Zugang zur Theorie); die Chevalleysche Methode rein arithmetisch durchzuführen (die nach Erscheinen des Heftes von Chevalley restlos durchgeführt werden konnte), die Beziehungen zur Algebrentheorie.

Deuring (Leipzig).

Richter, Hans: Voranzeige meiner Arbeit „Über Abelsche Körperembeddungen“. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 45, 235—236 (1935).

Dickson, L. E.: Cyclotomy when  $e$  is composite. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 187—200 (1935).

The author continues the work of two earlier investigations (this Zbl. 11, 53 and 12, 12) into the cyclotomic constants which appear as coefficients, when the product of two  $f$ -nomial periods of  $\exp(2\pi i/p)$  is expressed as a linear combination of all the periods. Here  $p = ef + 1$  is an odd prime. The previous papers dealt with the cases in which  $e$  or  $e/2$  is a prime and also  $\varphi(e) \leq 4$ . This paper extends the investigation to  $\varphi(e) \leq 8$ .

D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

Ward, Morgan: The diophantine equation  $X^2 - DY^2 = Z^M$ . Trans. Amer. Math. Soc. 38, 447—457 (1935).

Es sei  $D$  eine quadratfreie ganze Zahl,  $D \neq -3$ ,  $D \neq -1$ ,  $D \not\equiv 1 \pmod{8}$ , und es sei  $M$  eine natürliche Zahl, die zur Klassenanzahl des quadratischen Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$  teilerfremd ist. Unter diesen Voraussetzungen bestimmt Verf. sämtliche Lösungen der diophantischen Gleichung  $X^2 - DY^2 = Z^M$  in teilerfremden ganzen rationalen Zahlen  $X, Y, Z$ . In einem Schlußparagrafen werden die gewonnenen Ergebnisse angewandt, um Aufschlüsse über einige andere diophantische Gleichungen zu ge-



winnen, wobei sich eine Ausdehnung eines Satzes von Kapferer über die Fermatsche Gleichung [S.-B. Heidelberg. Akad. Wiss. 2, 32—37 (1933); s. dies. Zbl. 7, 4] einstellt.  
*Bessel-Hagen* (Bonn).

**Moessner, A.:** Die Gleichung  $A_1^n + A_2^n + A_3^n \dots = B_1^n + B_2^n + B_3^n \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , und verwandte Formen. Bol. mat. 8, 64—68 u. 83—87 (1935).

**Ward, Morgan:** On the factorization of polynomials to a prime modulus. Ann. of Math., II. s. 36, 870—874 (1935).

Ist  $A(x)$  ein ganzzahliges Polynom  $N$ -ten Grades mit ungleichen Nullstellen  $\alpha_i$  und  $p$  eine Primzahl, kein Diskriminantenteiler, dann ist  $A(x) \equiv A_1(x) A_2(x) \dots A_r(x) \pmod{p}$ , wo  $A_i \pmod{p}$  irreduzible Polynome sind. Für jedes  $A'(x) \equiv A(x) \pmod{p}$  gibt es eine höchste Potenz von  $p$ , durch welche  $\Delta_n(A') = \prod_{v=1}^N (\alpha_v^n - \alpha_v)$  bei gegebenem  $n$  teilbar ist.

Ist diese Potenz nicht die 0-te, so gibt es Polynome  $A'$ , für welche diese Potenz einen Minimalwert  $p^{q_M}$  hat. Bewiesen werden: Satz I: Die Anzahl der Polynome  $A_i$  des Grades  $M$  ist  $\frac{1}{M} \sum_{d|M} \mu(d) q_{M:d}$ ; Satz II: Ist  $p^{u_n}$  die höchste Potenz

von  $p$ , durch welche  $\Delta_n(A)$  teilbar ist, so hat  $A(x)$  dann und nur dann einen irreduziblen Faktor  $M$ -ten Grades, wenn  $\sum_{d|M} \mu(d) u_{M:d} > 0$  ist. Die Beweise beruhen auf (teils bekannten) Hilfssätzen über Kongruenzen  $x^{p^n} - x \equiv 0 \pmod{p, F(x)}$  und auf der Möglichkeit, die Polynome  $A_i \pmod{p}$  so zu wählen, daß, wenn  $\Delta_M(A_i)$  durch  $p$  teilbar ist,  $\Delta_M(A_i) \equiv 0 \pmod{p^{d_i+1}}$  und nicht  $\pmod{p^{d_i+1}}$ , wo  $d_i$  den Grad von  $A_i$  bedeutet.  
*N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

**Chowla, S.:** A remarkable property of the „singular series“ in Waring's problem and its relation to hypothesis *K* of Hardy and Littlewood. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 397—401 (1935).

**Chowla, S.:** The number of representations of a large number as a sum of  $n$  non-negative  $n$ th powers. Indian Phys.-Math. J. 6, 65—68 (1935).

Let  $S(n, k, s)$  denote the usual singular series in Waring's Problem; that is, if  $q$  is a primitive  $q$ -th root of unity, if

$$S_e = \sum_{h=0}^{q-1} q^{hk}, \quad \text{and} \quad A_q = q^{-s} \sum_q q^{-n} S_e^s, \quad \text{then} \quad S(n, k, s) = \sum_{q=1}^{\infty} A(q).$$

The author proves: (1) For fixed  $k$  and any positive  $A$  we can find infinitely many positive integers  $n$  such that  $S(n, k, k+1) > A$ ; (2) the number of  $n \leq x$  for which (1) is true is greater than  $Cx$  (for large  $x$ ), where  $C = C(A, k)$ ; (3)  $r_{k,k}(n) \neq O(1)$ .

*Wright* (Aberdeen).

**Chowla, S., and S. Sastry:** Note on hypothesis *K* of Hardy and Littlewood. Math. Z. 40, 348 (1935).

An example of  $(9)^{10} = (9)^{10}$  is given; from this it follows that  $r_{10,10}(n) \geq 2$  for an infinity of  $n$ .

*Wright* (Aberdeen).

**Sastry, S.:** On sums of powers. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 1, 928—929 (1935).

Let  $N(k)$  denote the least value of  $j$  such that there is a non-trivial solution of

$$a_1^k + \dots + a_j^k = b_1^k + \dots + b_j^k \quad (1 \leq k \leq j),$$

and let  $M(k)$  denote the least value of  $j$  such that there is a non-trivial solution for which

$$a_1^{k+1} + \dots + a_j^{k+1} \neq b_1^{k+1} + \dots + b_j^{k+1}.$$

The author proves by Tarry's process

$$N(4) = 5, \quad N(9) \leq 12, \quad N(18) \leq 60.$$

The reviewer remarks that the method of proof shows that the same result holds for  $M(k)$ , which is often more useful in applications. It is not known whether  $M(k) = N(k)$  for all  $k$ .

*Wright* (Aberdeen).

**James, R. D.: The constants in Waring's problem for odd powers.** Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 689—694 (1935).

By evaluating the constants in his analysis for Waring's problem for odd powers, the author proves the following theorem: Let  $k \geq 7$  be an odd integer;  $t \leq k2^{k-2}$  an integer;  $a = 1/k$ ;  $b = 1/(k-1)$ ;

$$d_a = [\log(k-1)/\log 2]; \quad d_b = [\log(k-2)/\log 2];$$

$$D_a = (d_a + 2)(k-1) - 2^{d_a+1} + \frac{1}{10};$$

$$D_b = (d_b + 2)(k-2) - 2^{d_b+1} + \frac{1}{10};$$

$$s_2 = 4 + \zeta_k = 4 + \left[ \frac{(k-2)\log 2 - \log k + \log(k-2)}{\log k - \log(k-1)} \right];$$

$$\eta = \frac{D_a(2k-1)(k-1) + D_b k(2t-4) + 2^{k-2}k(k-1)(1 + (1-a)^{-2})}{(2k-1)(k-1) + k(2t-4) - 2^{k-2}k(k-3) - k(k-1)};$$

$v = 4$  when  $k$  is divisible by 15,  $v = 2$  in all other cases. Then every integer  $n > C'$ , where  $\log_e C' = 25k^3 2^{2\eta}$ , is a sum of  $2t + s_2 + 2v + 2k - 1$   $k$ -th powers. This result enabled Dickson to prove that every integer is the sum of 4425 eleventh powers.

Wright (Aberdeen).

**Subba Rao, K.: Some easier Waring's problems.** Math. Z. **40**, 477—483 (1935).

Let  $\delta(k)$  be the least value of  $s$  such that a constant  $c = c(k) \neq 0$  can be expressed in the form

$$c = a_1 x_1^k + \dots + a_s x_s^k$$

infinitely often, where  $a_i = \pm 1$  and  $x_i$  is a positive integer. Let  $\varepsilon(k)$  be the least value of  $s$  such that 0 can be expressed infinitely often in the same form. Trivial solutions such as

$$1 = 1^k + x^k - x^k,$$

$$0 = x^k - x^k + y^k - y^k,$$

and so on, are excluded. The author proves:

$$\delta(k) \leq 2^k, \quad \varepsilon(k) \leq 2^{k+1}, \quad \delta(2) = \varepsilon(2) = 3,$$

$$\delta(3) = 3, \quad \varepsilon(3) = 4, \quad \delta(4) \leq 5, \quad \varepsilon(4) = 4,$$

$$\delta(5) \leq 9, \quad \varepsilon(5) \leq 6, \quad \delta(6) \leq 12, \quad \varepsilon(6) \leq 12,$$

$$\delta(7) \leq 14, \quad \varepsilon(7) \leq 16, \quad \delta(8) \leq 16, \quad \varepsilon(8) \leq 16,$$

$$\varepsilon(9) \leq 28, \quad \delta(10) \leq 40 \quad \text{and} \quad \delta(k) = O\left(16^{\frac{k}{7}}\right). \quad \text{Wright.}$$

**Subba Rao, K.: On sums of like powers.** Math. Z. **40**, 321—325 (1935).

The notation is that of Subba Rao, Math. Z. **39**, 240—243 (1934), amended in accordance with the reviewer's comment (this Zbl. **10**, 9). The author proves:  $\beta(7) \leq 6$ ,  $(5)^7 = (5)^7$ ,  $(6)^7 = (5)^7$ ,  $(4)^7 = (7)^7$ ,  $\gamma(7) \leq 9$ ,  $(1)^7 = (25)^7$ ,  $\beta(9) \leq 9$ ,  $(7)^9 = (9)^9$ ,  $(1)^9 = (32)^9$ ,  $\gamma(8) \leq 13$ ,  $\gamma(9) \leq 16$ .

Wright (Aberdeen).

**Chowla, Inder: On sums of powers.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **2**, 180 bis 181 (1935).

Proof by Tarry's process that (1)  $\beta(9) \leq 8$ , (2)  $(5)^7 = (5)^7$ ,  $(4)^7 = (6)^7$ ,  $(7)^9 = (7)^9$ , (3)  $r_{k,k-1}(n) \geq 2$  for infinitely many  $n$  for  $k = 7$  and  $k = 9$ .

Wright (Aberdeen).

**Chowla, Inder: Note on sums of sixth powers.** J. London Math. Soc. **10**, 233 (1935).

Proof that  $(5)^6 = (5)^6$  has infinitely many solutions.

Wright (Aberdeen).

**Sugar, Alvin: A new universal Waring theorem for eighth powers.** Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 675—678 (1935).

Proof by a combination of Hardy and Littlewood's results for large  $n$  and Dickson's algebraic method that  $g(8) \leq 566$ .

Wright (Aberdeen).

**Shah, S. M.: On inequalities satisfied by certain arithmetical functions. II.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **2**, 321—332 (1935).

The author gives inequalities for  $\pi_r(x)$ ,  $\varpi_r(x)$ ,  $\Pi_r(x)$  which are improvements on his previous ones (see this Zbl. **9**, 200), e.g.

$$\pi_{r+1}(x) < \frac{1}{r!} \frac{x}{\log x} \left( \log \log x + B + O\left(\frac{\log \log x}{\log x}\right) \right)^r$$



for  $\nu \geq 1$ ,  $x \geq 3$ , where  $B = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sum_{p \leq x} p^{-1} - \log \log x)$ . He observes that the  $O$ -term is best possible for  $\nu = 1$ . *Davenport* (Cambridge).

**Popken, J., und K. Mahler:** Ein neues Prinzip für Transzendenzbeweise. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 864—871 (1935).

J. Popken zeigte in seiner Dissertation (Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen, S. 88. Diss. Groningen 1935; 121 S.) u. a. den folgenden Satz: Stellt die Potenzreihe  $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  mit algebraischen Koeffizienten  $a_h$  eine im Ursprung reguläre analytische Funktion dar, die einer eigentlichen algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist mit einem geeignet gewählten  $c > 0$  für  $h \geq 2$

$$\text{entweder } a_h = 0 \quad \text{oder} \quad |a_h| \geq e^{-c h \log^2 h}.$$

Auf diesem Satz beruht die vorliegende Methode für Transzendenzbeweise: Genügt eine vorgegebene Potenzreihe einer algebraischen Differentialgleichung und streben ihre Koeffizienten genügend schnell gegen Null, so können diese Koeffizienten nicht alle algebraisch sein; weil sie aber eine endliche algebraische Basis besitzen, können also die Elemente dieser Basis nicht alle algebraisch sein. Verff. führen die Anwendung dieses Prinzips an einem konkreten Beispiel durch und zeigen: Für jedes  $q$  mit

$0 < |q| < 1$  ist mindestens eine der drei Zahlen:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2hn}}{(1-q^{2n})^2 h}$  ( $h = 1, 2, 3$ ) transzendent. Korollar: Von den drei Größen:

$$\frac{\omega \eta}{\pi^2}, \quad \frac{\omega^4 g_2}{\pi^4}, \quad \frac{\omega^6 g_3}{\pi^6},$$

die zu einer nicht ausgearteten  $p$ -Funktion gehören, ist mindestens eine transzendent. — Diese Arbeit ist, wie Verff. bemerken, unabhängig von einer ähnlichen Pólyaschen Arbeit, die wenige Zeit vorher erschien (dies. Zbl. 12, 76). Das Pólyasche Ergebnis ist in dem obigen enthalten. *J. F. Koksma* (Amsterdam).

## Gruppentheorie.

**Grün, Otto:** Beiträge zur Gruppentheorie. I. J. reine angew. Math. 174, 1—14 (1935).

Es werden zunächst Gruppen untersucht, die  $p$ -Gruppen als Normalteiler enthalten; sodann wird die Frage nach der Struktur der abelschen Faktorgruppen einer gegebenen Gruppe  $\mathfrak{G}$  auf die Untersuchung der Normalisatoren der Sylowgruppen von  $\mathfrak{G}$ , d. h. auf Gruppen der zuerst behandelten Art zurückgeführt. Von den zahlreichen Ergebnissen der Arbeit seien vor allem die folgenden erwähnt: 1.  $\mathfrak{P}$  sei eine in  $\mathfrak{G}$  als Normalteiler enthaltene  $p$ -Gruppe,  $\mathfrak{Z}_i$  ihre aufsteigende Zentrenreihe, d. h. es sei  $\mathfrak{Z}_0 = 1$  und  $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Z}_{i-1}$  das Zentrum von  $\mathfrak{P}/\mathfrak{Z}_{i-1}$ . Ist dann  $n_i$  der Rang der abelschen Gruppe  $\mathfrak{Z}_i/\mathfrak{Z}_{i-1}$ ,  $\mathfrak{L}$  eine zur Primzahl  $l \neq p$  gehörige Sylowgruppe von  $\mathfrak{G}$ ,  $l^{m_i} \equiv 1 \pmod{p}$  und  $n_i/m_i < l^k$  für alle  $i$ , so ist die  $k$ -te Ableitung  $\mathfrak{L}^{(k)}$  von  $\mathfrak{L}$  mit  $\mathfrak{P}$  elementweise vertauschbar. — 2.  $\mathfrak{G}$  heiße  $p$ -normal, wenn der Normalisator  $\mathfrak{N}$  des Zentrums  $\mathfrak{Z}$  einer  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{G}$  alle die mit  $\mathfrak{P}$  in  $\mathfrak{G}$  konjugierten Sylowgruppen von  $\mathfrak{G}$  enthält, die  $\mathfrak{Z}$  enthalten. (Nicht jede Gruppe ist  $p$ -normal.) Es gilt: Ist  $\mathfrak{G}$   $p$ -normal, so sind die größten abelschen  $p$ -Faktorgruppen von  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{N}$  isomorph. Eine Konsequenz dieses Satzes ist der Satz von Burnside, daß für eine Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  im Zentrum ihres Normalisators enthalten ist, die maximale abelsche  $p$ -Faktorgruppe von  $\mathfrak{G}$  mit  $\mathfrak{P}$  isomorph ist. Der Beweis benutzt an Stelle der von Burnside verwendeten monomialen Darstellungen Eigenschaften der Verlagerung [s. etwa H. Hasse, Jber. Deutsch. Math.-Verein. Ergänzungsbd. 6, 170 (1930)] von  $\mathfrak{G}$  nach  $\mathfrak{N}$  modulo der Ableitung  $\mathfrak{N}'$  von  $\mathfrak{N}$ . Der oben formulierte Satz liefert ferner für den Fall, daß  $\mathfrak{P}$  abelsch ist, mehrere bemerkenswerte Verallgemeinerungen des Burnsidischen Satzes. — 3. Für beliebige endliche Gruppen  $\mathfrak{G}$  gilt: Ist  $\mathfrak{N}$  der Nor-



malisator der  $p$ -Sylowgruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{P}'$  die Ableitung von  $\mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{N}'$  die Ableitung von  $\mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{P}_0$  die  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathfrak{N}$ ,  $\Pi$  das Kompositum aller Durchschnitte von  $\mathfrak{P}$  mit den Konjugierten von  $\mathfrak{P}'$ , so ist die maximale abelsche  $p$ -Faktorgruppe  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$  von  $\mathfrak{G}$  isomorph zu der Faktorgruppe  $\mathfrak{P}/\Pi \cdot \mathfrak{P}_0$  von  $\mathfrak{P}$ . Ist  $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_0$  die maximale abelsche  $p$ -Faktorgruppe von  $\mathfrak{N}$ , so gilt überdies  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0 \sim \mathfrak{N}/\Pi \cdot \mathfrak{N}_0$ , und  $\mathfrak{P}_0$  ist der kleinste Normalteiler von  $\mathfrak{N}$  derart, daß  $\mathfrak{P}/\mathfrak{P}_0$  im Zentrum von  $\mathfrak{N}/\mathfrak{P}_0$  liegt. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Baker, H. F.:** Note introductory to the study of Klein's group of order 168. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 468—481 (1935).

Es handelt sich um einen neuen und vereinfachten Zugang zu den zahlreichen Untersuchungen, die sich an die einfache Gruppe  $\mathfrak{G}$  der Ordnung 168 anschließen. Vor allem wird, ausgehend von der Darstellung von  $\mathfrak{G}$  durch ternäre lineare Substitutionen, die aus der zugehörigen Invariante vierten Grades  $F$  entstehende Kurve  $F = 0$  untersucht, unter wesentlicher Benutzung der Konfiguration der 28 Doppel-tangenten dieser Kurve. Anschließend folgt eine Diskussion geometrischer Fragen, die mit einer Raumkurve sechsten Grades zusammenhängen, deren Punkte umkehrbar eindeutig denen von  $F = 0$  zugeordnet sind. Von den sonst behandelten Fragen sei insbesondere die Diskussion der bekannten linearen Differentialgleichung 3. Ordnung mit  $\mathfrak{G}$  als Monodromiegruppe und eine Verallgemeinerung der Resultate auf gewisse Systeme von linearen Differentialgleichungen mit mehreren unbekannten Funktionen erwähnt. *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Mann, Heinrich:** Über eine notwendige Bedingung für die Ordnung einfacher Gruppen. Anz. Akad. Wiss., Wien **1935**, 209—210 (Nr 19).

Einfacher Beweis der folgenden Sätze: 1. Die einzige einfache Gruppe der Ordnung  $p^2 q^r$  ( $p, q, r$  Primzahlen,  $p < q < r$ ) ist die Ikosaedergruppe (s. G. Frobenius, Über auflösbare Gruppen II. S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1895**, 1042), und 2. Ist die Ordnung  $g$  einer Gruppe  $\mathfrak{G}$  weder durch 12 noch durch die dritte Potenz eines kleineren als des zweitgrößten in  $g$  aufgehenden Primfaktors teilbar, so ist  $\mathfrak{G}$  auflösbar. Beweis im wesentlichen wie der von Speiser (Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, 2. Aufl., S. 144. Berlin 1927) für einen Teil dieses Satzes. *Magnus*.

**Turkin, W.:** Verallgemeinerung eines gruppentheoretischen Satzes von Landau. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 59—62 (1935).

Es wird gezeigt: Sind  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$  eine endliche Reihe ganzer positiver Zahlen, so gibt es nur endlich viele nichtisomorphe Gruppen  $G$  von endlicher Ordnung, so daß  $G$   $k-1$  Untergruppen mit den Indizes  $i_1, i_2, \dots, i_{k-1}$  besitzt, für die  $\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \dots + \alpha_{k-1} i_{k-1} + \alpha_k = n =$  der Ordnung von  $G$  gilt. Dieser Satz enthält einen Satz von Landau [Math. Ann. **56**, 674—676 (1903)], wonach es nur endlich viele nichtisomorphe Gruppen mit gegebener Klassenanzahl  $k$  gibt, denn die Anzahl der Elemente in einer Klasse ist Index einer Untergruppe, und mindestens einer dieser Indizes ist  $= 1$ . *Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Tschunichin, S.:** Une généralisation des théorèmes de G. Frobenius et V. Turkin. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 9—10 (1935).

**Tschunichin, S.:** Über einige Sätze der Gruppentheorie. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 199—200 (1935).

Beiden Arbeiten liegt der Satz zugrunde, daß die „Verlagerung“ einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  nach einer echten Untergruppe  $\mathfrak{H}$  mod. der Kommutatorgruppe  $\mathfrak{R}$  von  $\mathfrak{H}$  eine homomorphe Abbildung von  $\mathfrak{G}$  auf eine Untergruppe der abelschen Gruppe  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{G}/\mathfrak{R}$  liefert, so daß  $\mathfrak{G}$  nicht einfach sein kann, wenn die Verlagerung  $V(A)$  eines Elementes  $A$  von  $\mathfrak{G}$  nicht das Einheits-element von  $\mathfrak{Z}$  ist. Dabei ist  $V(A)$  das durch den Komplex  $H_1 \dots H_k \mathfrak{R}$  definierte Element von  $\mathfrak{Z}$ , wenn  $\mathfrak{G} = \sum_{i=1}^k \mathfrak{H}_i T_i$  eine Zerlegung von  $\mathfrak{G}$  nach Nebengruppen von  $\mathfrak{H}$  ist und  $H_i$  die durch  $T_i A = H_i T_i$  ( $T_i$  ist wieder eines der  $T_i$ ) eindeutig bestimmten Elemente von  $\mathfrak{H}$  sind. Ist nun  $A$  ein nicht in  $\mathfrak{R}$  gelegenes Element von  $\mathfrak{H}$ , so daß alle in  $\mathfrak{H}$  enthaltenen Konjugierten einer be-



liegenden Potenz  $A^k$  von  $A$  in dem Komplex  $A^k \mathfrak{A}$  liegen, so ist  $V(A)$  das durch den Komplex  $A^k \mathfrak{A}$  definierte Element von  $\mathfrak{L}$ , wobei  $k$  der Index von  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{G}$  ist. Ist also die Ordnung von  $A$  Potenz einer zu  $k$  teilerfremden Primzahl  $p$ , so kann  $\mathfrak{G}$  nicht einfach sein. Das gleiche gilt, wie man genau so zeigt, wenn  $\mathfrak{H}$  die von einem Element  $A$  des Zentrums einer  $p$ -Sylogruppe  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{G}$  erzeugte Gruppe ist und die Ordnung von  $\mathfrak{P}$  kleiner ist als das Quadrat der Ordnung von  $A$ , wobei keine die Ordnung von  $\mathfrak{G}$  teilende Primzahl in  $p - 1$  aufgeht, oder wenn  $\mathfrak{H}$  sein eigener Normalisator in  $\mathfrak{G}$  ist und ein nicht in  $\mathfrak{A}$  enthaltenes Element  $A$  von  $\mathfrak{H}$  mit der Eigenschaft existiert, daß keine Potenz  $A^k \neq 1$  in einer mit  $\mathfrak{H}$  in  $\mathfrak{G}$  konjugierten von  $\mathfrak{H}$  verschiedenen Untergruppe von  $\mathfrak{G}$  auftritt. Schließlich läßt sich auch noch zeigen, daß  $\mathfrak{G}$  nicht einfach sein kann, wenn in einer Untergruppe  $\mathfrak{H}$  ein Element  $A$  auftritt, dessen sämtliche Potenzen  $A^k \neq 1$  nicht in  $\mathfrak{A}$  liegen, dessen sämtliche in  $\mathfrak{H}$  gelegenen konjugierten dem Komplex  $A^k \mathfrak{A}$  angehören und dessen Ordnung die Potenz einer zum Index  $k$  von  $\mathfrak{H}$  teilerfremden Primzahl ist. — Die Beweise sind nur angedeutet; die Resultate enthalten Verallgemeinerungen von Sätzen, die G. Frobenius (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1901, 849—857) mit Hilfe der Theorie der Gruppencharaktere abgeleitet hat.

*Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Tchounikhin, Serge:** Über einige Sätze der Gruppentheorie. Math. Ann. 112, 92—94 (1935).

**Tchounikhin, Serge:** Über einfache Gruppen. Math. Ann. 112, 95—97 (1935). Ausführliche Beweise der vom Autor in den C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 9—10, 199—200 (1935) mitgeteilten Sätze. (Vgl. das vorst. Referat über diese Arbeiten.)

*Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Wielandt, Helmut:** Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. Math. Z. 40, 582—587 (1935).

Es wird die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von I. Schur (S.-B. Berlin. Akad. Wiss. 1933, 598—623; dies. Zbl. 7, 149) bewiesen: Ist der Grad  $n$  der Permutationsgruppe  $\mathfrak{G}$  keine Primzahl und enthält  $\mathfrak{G}$  eine reguläre abelsche Untergruppe  $\mathfrak{H}$  des Grades  $n$ , von deren Sylowgruppen mindestens eine zyklisch ist, so ist  $\mathfrak{G}$  zweifach transitiv oder imprimitiv; im letzteren Falle enthält  $\mathfrak{G}$  einen intransitiven Normalteiler  $\mathfrak{N}$ , dessen Durchschnitt mit  $\mathfrak{H}$  vom Einheitsselement und von  $\mathfrak{H}$  verschieden ist.

*Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Toyoda, Kôshichi:** On the adjoint groups of Lie's continuous groups. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 269—283 (1935).

Let  $c_{jk}^i$  be a constant tensor under a non-singular linear transformation with matrix  $A$ . The totality of transformations  $A$  leaving  $c_{jk}^i$  invariant constitutes a group  $G$ , which the author studies, giving in matrix notation various results such as a necessary and sufficient condition that a set of infinitesimal symbols generate one of its subgroups, and relations between the generators of  $G$  and its adjoint. He proves also that if  $c_{jk}^i$  are the constants of structure of  $G$ , the adjoint of  $G$  is equivalent to an invariant subgroup of  $G$ .

*J. M. Thomas* (Durham).

**Bagchi, S. C.:** Geometrisation of physics. Bull. Calcutta Math. Soc. 26, 39—50 (1935). Der Artikel enthält eine Zusammenstellung der Anwendungen der Theorie der kontinuierlichen Gruppen auf die verschiedenen Gebiete der Physik. *O. Klein*.

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Mazurkiewicz, Stefan:** Sur l'existence des continus indécomposables. Fundam. Math. 25, 327—328 (1935).

The author proves that every compact metric space of dimension  $\geq 2$  contains an indecomposable continuum. This is accomplished by first showing with the aid of a sequence of lemmas that if  $f$  is an essential transformation of  $A$  into the closed 2-cell  $Q_2$  and if  $C$  is any subcontinuum of  $Q_2$ , then there exists a continuum  $L$  in  $A$



such that  $f(L) = C$ . The principal conclusion of the paper is then obtained as a consequence of this and of two previously known theorems. *G. T. Whyburn.*

**Lusin, N.: Sur les ensembles analytiques nuls.** *Fundam. Math.* 25, 109—131 (1935).

A null set is one devoid of elements; an analytic null set  $N$  is defined by means of a rectilinear sieve  $C$  whose intersection with every line directed along the positive direction of the  $y$ -axis is a normally ordered set. The complement of  $N$ , which is the entire continuum, is the sum

$$E_0 + E_1 + \dots + E_\alpha + \dots / \Omega$$

of  $B$ -measurable constituents, all but a denumerable number of which are null sets; the smallest  $\beta$  such that  $E_\beta, E_{\beta+1}, \dots / \Omega$  are all null sets is the degree of the sieve  $C$ ; if  $\beta$  is of the first species,  $\beta = \beta^* + 1$ ,  $E_{\beta^*}$  is called the superior constituent. A normally ordered sieve  $\Gamma$  is one whose orthogonal projection  $G$  upon the  $y$ -axis is normally ordered; the type of order of  $G$  is said to be the type of  $\Gamma$ . The principal result of this paper is the theorem: Every normally ordered sieve of type  $\gamma$  possesses a superior constituent  $E_\gamma$  satisfying the symbolic inequality  $E_\gamma \leq \text{él.} \{[2(\log \gamma) - 1] + 1\}$ ; conversely, every  $B$ -measurable set  $E$  satisfying the inequality  $E \leq \text{él.} \{[2(\log \gamma) - 1] + 1\}$  is the superior constituent of a normally ordered sieve of type  $\gamma$ ; here  $E \leq \text{él.} \alpha$ , referring to the classification of de la Vallée Poussin, means that  $E$  is either of class  $< \alpha$ , or "element" of class  $\alpha$ , or "bilateral" set of class  $\alpha$ ;  $\gamma = \alpha - \beta$  means that  $\alpha = \beta + \gamma$ ; and  $\log \alpha = \bar{\alpha}$  means that  $\alpha = \omega_{\bar{\alpha}} + \omega_{\bar{\alpha}-1} + \dots + \omega_{\bar{\alpha}-k}$ , where  $\bar{\alpha} \geq \bar{\alpha}_1 \geq \dots \geq \bar{\alpha}_k$ ,  $k$  being an ordinary integer  $\geq 1$ . The second half of the paper is devoted largely to calling attention to various problems concerning the constituents of  $B$ -non-measurable analytic sets  $E$  — for example, whether it is possible to define a rectilinear sieve such that all the constituents  $E_\alpha$  of  $E = E_0 + \dots + E_\omega + \dots + E_\alpha + \dots / \Omega$ , of which there must be a non-denumerable number not null, are of bounded class — estimating the degree of difficulty of their solution, and discussing their significance; for one of them, a tentative solution — one which the author deems interpretable as a solution — is presented, which consists in circumventing the problem itself through the stratagem of introducing certain ideal elements after the manner of Drach in the matter of ideal algebraic numbers. The tenor of the author's discussion derives in part from his personal views in matters customarily regarded as belonging to the domain of mathematical controversy. *Blumberg (Columbus).*

**Lusin, N., et P. Novikoff: Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un erible.** *Fundam. Math.* 25, 559—560 (1935).

Scharfsinniges und einfaches Verfahren, welches die Existenz einer effektiven Wahl je eines Punktes aus jeder  $CA$ -Menge beweist, die jedoch selbst als effektiv gegeben, und zwar durch Angabe eines Lusinschen Siebes (vgl. dies. Zbl. 3, 153), vorausgesetzt ist. Der Punkt wird aus der ersten nichtleeren Konstituante der auf diese Weise gegebenen  $CA$ -Menge mittels eines Durchschnittsverfahrens herausgegriffen.

*B. Knaster (Warszawa).*

**Novikoff, Pierre: Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe.** *Fundam. Math.* 25, 459—466 (1935).

Die zu den sog. I. und II. Separationsprinzipien von N. Lusin (vgl. z. B. dies. Zbl. 10, 56) analogen Sätze gelten für die Mengenklassen  $PCA$  und  $CPCA$  nicht mehr. Dagegen: I. Zwei punktfremde  $CPCA$ -Mengen lassen sich stets in zwei punktfremde Mengen einschließen, die gleichzeitig  $PCA$ - und  $CPCA$ -Mengen sind. II. Differenzmengen zweier  $PCA$ - bzw.  $CPCA$ -Mengen lassen sich stets in zwei punktfremde  $PCA$ -Mengen einschließen. Die Beweise beruhen u. a. auf Anwendung des vom Verf. eingeführten Begriffes vom minimalen Index und sind nicht auf höhere projektive Mengenklassen ohne weiteres übertragbar. Es werden auch Sätze über vervielfachte Separabilität (dies. Zbl. 10, 155) der  $CPCA$ -Mengen bewiesen. *B. Knaster.*



**Takahashi, Tatsuo:** The category of the function set of a certain class. *Proc. Phys.-Math. Soc. Jap.*, III. s. 17, 359—361 (1935).

Let  $M(u)$  ( $u \geq 0$ ) be a non-negative and non-decreasing convex function, which satisfies the following conditions (1)  $M(0) = 0$ , (2)  $M(u)/u \rightarrow 0$  as  $u \rightarrow 0$ , (3)  $M(u)/u \rightarrow \infty$  as  $u \rightarrow \infty$ , (4)  $M(2u) \leq KM(u)$  ( $u > u_0$ ), where  $K$  is independent of  $u$ . The set  $\mathfrak{M}$  of functions  $f(x)$  of period 1 and such that  $M\{|f(x)|\}$  is integrable  $L$  over  $(0, 1)$  may be considered as a linear, vector, and metric space (see Birnbaum and Orlicz, this *Zbl.* 3, 252). Generalizing a result of Quade (this *Zbl.* 11, 253), the author shows

that the set of functions  $f(x)$  such that  $\int_0^1 M\left\{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h^\alpha}\right|\right\} dx = O(1)$ , is of the first category in  $\mathfrak{M}$ .  
A. Zygmund (Wilno).

**Ostrowski, Alexandre:** Addition à la note „Sur les multiplicités des zéros des fonctions indéfiniment dérivables de deux variables“. (Ce *Bulletin*, t. LVIII, février 1934, p. 64—72.) *Bull. Sci. math.*, II. s. 59, 259—260 (1935).

Brief, elementary proof of the lemma: Let  $f(x)$  be continuous in the interval  $J$ ;  $N$  a closed set in  $J$ ;  $f(x) = 0$  in  $N$ ;  $f'(x)$  exist and be continuous at every point of  $J - N$  and approach 0 as  $x$  approaches a point of  $N$ ; then  $f'(x)$  exists and equals 0 for every point of  $N$  (see this *Zbl.* 9, 57).  
Blumberg (Columbus).

**Sargent, W. L. C.:** On the Cesàro derivatives of a function. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 40, 235—254 (1935).

The author proves several properties about  $C$ (esàro)-continuity and the  $C$ -derivates and -derivatives, first defined by Burkill [*Proc. London Math. Soc.* (2) 34, 314—322 (1932); this *Zbl.* 5, 392]. We may mention: (1) If  $f(x)$  is  $C$ -continuous in the closed interval  $(a, b)$  and the  $C$ -derivative  $CD f(x)$  exists for  $a < x < b$ , then there is an interior point  $\xi$  of  $(a, b)$  such that  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = CD f(\xi)$ . (2) If the upper  $C$ -derivate of a (Perron-integrable) function  $f(x)$ ,  $CD^* f(x)$ , is  $< \infty$  in a set  $E$ , then  $f(x)$  is approximately differentiable almost everywhere in  $E$ , and  $CD^+ f(x) = AD f(x) = CD^- f(x)$  at almost all points of  $E$ ,  $AD$ ,  $CD^+$ ,  $CD^-$  indicating the approximate derivative, the upper right- and the upper left  $C$ -derivate respectively. (3) If  $CD^+ f(x)$  and  $CD_- f(x)$  are finite in a set  $E$ , then  $AD f(x)$  and  $CD f(x)$  exist and are equal almost everywhere in  $E$ . Functions, constructed by the author, show, that the disposition of the  $C$ -derivates may be quite different from that of either the ordinary derivate (theorem of Denjoy-G. C. Young) or the approximate derivatives (theorem of Denjoy-Khintchine).  
J. Ridder (Groningen).

**Flamant, Paul:** Sur deux fonctions attachées à une fonction sommable et leur application à la limite des intégrales de Lebesgue. *C. R. Acad. Sci.*, Paris 201, 930 bis 932 (1935).

L'auteur introduit et étudie la notion d'égale sommabilité des fonctions et signale le théorème: si une suite de fonctions  $\{\varphi_n(x)\}$  converge en mesure vers une fonction  $\varphi(x)$ , on a  $\lim \int_E \varphi_n dx = \int_E \varphi dx$  sur tout ensemble mesurable  $E$ . Cet énoncé ne semble pas être essentiellement nouveau, puisque, comme l'auteur l'observe, la sommabilité égale des fonctions équivaut à la continuité égale (au sens de Vitali) de leurs intégrales. Un autre théorème signalé par l'auteur est le suivant: pour les fonctions de carrés également sommables, la convergence en mesure et celle en moyenne sont équivalentes. Ce théorème (généralement, pour les fonctions de  $p$ -ièmes puissances également sommables,  $p \geq 1$ ) paraît être une conséquence immédiate de l'inégalité connue de Minkowski-Riesz

$$\left[ \int_E |\varphi - \psi|^p dx \right]^{1/p} \leq \left[ \int_E |\varphi|^p dx \right]^{1/p} + \left[ \int_E |\psi|^p dx \right]^{1/p}.$$

Saks (Warszawa).



**Denjoy, Arnaud:** Sur l'intégration des coefficients différentiels d'ordre supérieur. *Fundam. Math.* 25, 273—326 (1935).

Une fonction continue  $f(x)$  possède au point  $x$  une différentielle d'ordre  $n$  lorsque

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + \dots + \frac{h^p}{p!} f_p(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} [f_n(x) + \varepsilon_n(x, h)] \quad (*)$$

$\varepsilon_n(x, h)$  tendant vers 0 avec  $h$ ; le nombre  $f_p(x)$  où  $p = 1, 2, \dots, n$  est appelé le  $p$ -ième quotient différentiel de  $f(x)$  au point  $x$ . Plus généralement, lorsque  $f(x)$  possède au point  $x$  un différentiel de  $(n-1)$ -ième ordre, la plus grande et la plus petite limite de l'expression

$$n! [f(x+h) - f(x) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f_{n-1}(x)] / h^n$$

s'appellent coefficients différentiels extrêmes, supérieur et inférieur respectivement. Il est clair ce qu'on doit entendre par les différentielles, les quotients et les coefficients différentiels unilatéraux (droits et gauches), approximatifs, spéciaux à un ensemble (c.-à-d. pris par rapport à cet ensemble) etc. La première partie du Mémoire est consacrée à une étude approfondie des propriétés fondamentales des quotients différentiels. On peut mentionner les théorèmes suivants: Le nombre  $\varepsilon_n(x, h)$  [dans la formule (\*)] étant uniformément borné sur un ensemble parfait  $P$ , le quotient  $f_n(x)$  est borné sur  $P$ , pendant que les quotients différentiels  $f_p(x)$  pour  $p \leq n-1$  sont continus sur  $P$  et différentiables d'ordre  $(n-p-1)$  spécialement à  $P$  (th. II). Une fonction  $f(x)$ , continue sur un ensemble  $H$  et possédant partout un quotient différentiel d'ordre  $n$  spécial à  $H$ , ce quotient est de première classe au plus sur  $H$ . Le plus important résultat de cette partie consiste dans l'extension suivante d'un des théorèmes antérieurs de l'auteur sur les nombres dérivés [*J. Math. pures appl.* (7) 1, 105—240 (1915)]: Lorsque une fonction continue  $f(x)$  possède presque partout dans un ensemble  $E$ , au moins d'un côté, deux coefficients différentiels  $n$ -ièmes extrêmes finis,  $f(x)$  est presque partout dans  $E$  différentiable d'ordre  $n$ . — Dans la deuxième partie l'auteur introduit la notion de quotient différentiel généralisé d'ordre  $n$ , défini comme la limite d'une expression dépendant de  $n+1$  paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$  fixés arbitrairement (dans le cas  $n=2$  en choisissant convenablement ces paramètres on revient à la dérivée seconde généralisée de Riemann-Schwarz; en général, lorsque la fonction admet une différentielle d'ordre  $n$ , elle possède, pour chaque choix de paramètres, un quotient différentiel généralisé d'ordre  $n$  égal à celui au sens ordinaire). Lorsque, pour un système des paramètres  $\alpha_i$ , une fonction continue  $f(x)$  possède partout un différentiel généralisé d'ordre  $n$ , s'annulant identiquement dans  $(a, b)$ , la fonction  $f(x)$  se réduit à un polynôme de degré  $n-1$  au plus dans l'entourage de tout point de  $(a, b)$  excepté un ensemble non dense. L'auteur discute des conditions (se rapportant aux valeurs des  $\alpha_i$ ) pour que cet ensemble exceptionnel ne contienne pas de points isolés, ou bien qu'il soit vide. C'est seulement dans le dernier cas qu'une fonction est toujours déterminée uniquement, à un polynôme de degré  $n-1$  au plus près, par la connaissance de son  $n$ -ième quotient différentiel généralisé supposé existant partout. — Dans la dernière partie du Mémoire l'auteur traite un problème analogue, mais seulement pour les quotients différentiels ordinaires, ou plus généralement — approximatifs. Une condition (suffisante) pour qu'une fonction soit déterminée (à l'addition près d'un polynôme de degré  $n-1$ ) par son  $n$ -ième quotient approximatif est qu'elle soit résoluble d'ordre  $n$ . Les fonctions résolubles d'ordre 1 ont été traitées par l'auteur dans son Mémoire antérieur sur la totalisation [*Ann. Ecole norm.* 33, 127—222 (1916); 34, 181—238 (1917)]. La définition générale est bien plus compliquée pour  $n$  quelconque que dans le cas spécial  $n=1$ ; on mentionnera seulement, à titre d'exemple, que toute fonction  $n$  fois différentiable, ou plus généralement, possédant les deux  $n$ -ièmes coefficients différentiels extrêmes (bilatéraux) finis, est résoluble d'ordre  $n$ . Toute fonction  $f(x)$  résoluble d'ordre  $n$  possède presque partout un quotient différentiel approximatif  $\varphi(x)$  d'ordre  $n$  et un procédé de „totalisation“ est défini permettant de remonter de  $\varphi(x)$  à la fonction primitive  $f(x)$ .

Saks (Warszawa).

**Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff:** Sur quelques théorèmes de la théorie générale de la mesure. *C. R. Acad. Sci., Paris* 201, 1002—1003 (1935).

Etant donné un espace métrique et compact  $\Omega$ , une fonction d'ensemble  $\varphi(A)$ , non-négative et complètement additive pour les ensembles mesurables  $(B)$ , est appelée mesure normalisée dans  $\Omega$ , lorsque  $\varphi(\Omega) = 1$  et lorsque  $\varphi(A)$  pour tout ensemble  $A \subset \Omega$  est la borne inférieure des valeurs  $\varphi(O)$ , où  $O$  désigne un ensemble ouvert quelconque contenant  $A$ . Une suite  $\{\varphi_n\}$  de mesures normalisées dans  $\Omega$  converge vers une mesure normalisée  $\varphi$  lorsque la relation  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(P) d\varphi_n = \int f(P) d\varphi$  a lieu pour chaque fonction continue de point  $f(P)$  dans  $\Omega$ . Comme on voit, la convergence ainsi définie présente une extension de la convergence faible des fonctions d'ensemble



à variation bornée dans les espaces euclidiens. En généralisant un théorème connu concernant ces fonctions, les auteurs démontrent que toute suite des mesures normalisées contient une suite partielle convergente dans le sens de la définition précédente. Ce résultat est à son tour appliqué à définir l'intégrale de Riemann  $\int_a^b \varphi_t dt$ , où  $\varphi_t$  est une mesure normalisée dépendant de manière continue d'un paramètre réel  $t$  dans un intervalle  $(a, b)$ . Saks (Warszawa).

## Analysis.

● Naske, Carl: *Integraltafeln. Für Ingenieure und verwandte Berufe sowie für Studierende Technischer Hoch- und Fachschulen.* Leipzig: Otto Spamer Verl. G. m. b. H. 1935. IV, 48 S. RM. 2.80.

Mignosi, G.: *Dimostrazione elementare del principio di Cavalieri per le aree e i volumi.* *Esercit. Mat.*, II. s. 8, 205—214 (1935).

Cattaneo, Paolo: *Generalizzazione del teorema di Eulero sulle funzioni omogenee.* *Giorn. Mat. Battaglini*, III. s. 73, 7—8 (1935).

Nach L. Toscano heißt eine Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  eine Funktion  $\psi$  vom Gewicht  $\lambda$  und vom Charakter  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ , wenn die Beziehung  $f(t^{\lambda_1} x_1, t^{\lambda_2} x_2, \dots, t^{\lambda_n} x_n) = t^\lambda f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  besteht. Ist nun  $u_r = \sum \lambda_{h_1} \lambda_{h_2} \dots \lambda_{h_r} x_{h_1} x_{h_2} \dots x_{h_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{h_1} \partial x_{h_2} \dots \partial x_{h_r}}$  und  $v_r = \sum \lambda_{h_1}^2 \lambda_{h_2} \dots \lambda_{h_r} x_{h_1} x_{h_2} \dots x_{h_r} \frac{\partial^r f}{\partial x_{h_1} \partial x_{h_2} \dots \partial x_{h_r}}$ , so gilt folgende Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes über die homogenen Funktionen:  $u_r = \lambda' f - \sum h \lambda'^{-1-h} v_h$ . L. Schrutka (Wien).

Hostinský, B.: *Sur l'intégration des substitutions linéaires.* *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 22, 221—225 (1935).

Skizze einer neuen Darstellung der Volterraschen Theorie der Integration von Substitutionen [vgl. V. Volterra, *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* *Mem. Soc. ital. Sci.*, III. s. 6, Nr 8 (1887)]. A. Kolmogoroff.

Corput, J. G. van der: *Verteilungsfunktionen. I.* *Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 38, 813—821 (1935).

Ist  $U$  eine Folge reeller Zahlen  $u_1, u_2, \dots$ , so bedeute  $U_\gamma(x)$  für reelles  $\gamma$  und natürliches  $x$  die Anzahl der  $u_k < \gamma$  mit  $\xi \leq x$ . Ist es möglich, die Zahl  $x$  so gegen Unendlich streben zu lassen, daß  $\frac{U_\gamma(x)}{x}$  für jedes  $\gamma$  gegen einen Grenzwert  $\psi(\gamma)$  strebt, so nennt Verf. diesen Grenzwert  $\psi(\gamma)$  eine Verteilungsfunktion der Folge  $U$ . — Verf. zeigt durch elementare Überlegungen mehrere Eigenschaften solcher Verteilungsfunktionen, und er kündigt verschiedene Sätze an, deren Beweise in den folgenden Mitteilungen II—VI (in derselben Zeitschrift) erscheinen werden. Jede Folge  $U$  besitzt wenigstens eine Verteilungsfunktion. Jede im Intervall  $(-\infty, \infty)$  überall dicht liegende Folge  $U$  kann so umgeordnet werden, daß die umgeordnete Folge dieselben Verteilungsfunktionen hat wie eine beliebig vorgegebene Folge  $V$ , die aus untereinander verschiedenen Zahlen besteht. Weiter wird eine notwendige und hinreichende Bedingung gegeben, damit eine vorgegebene Funktionenmenge die Menge der Verteilungsfunktionen ist für eine geeignet gewählte Folge. Anwendung auf die Theorie der Verteilungsfunktionen (mod 1), d. h. auf die Theorie der Verteilungsfunktionen der zu  $U$  gehörigen Folge  $u_1 - [u_1], u_2 - [u_2], \dots$  J. F. Koksma (Amsterdam).

Bohr, Harald: *Ein allgemeiner Satz über die Integration eines trigonometrischen Polynoms.* *Prace mat.-fiz.* 43, 273—288 (1935).

On sait qu'une fonction presque périod. réelle, à valeur moyenne nulle et dont les exposants ont une plus petite limite positive, admet une intégrale p. p. elle aussi. L'auteur dé-



montre d'abord que ce résultat est équivalent au suivant (cf. ce Zbl. 11, 110): En posant:

$$p(t) = \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cos \lambda_n t + \beta_n \sin \lambda_n t); \quad \min_{n=1, \dots, N} \{\lambda_n\} = 1; \quad \overline{\text{borne}} |p(t)| = 1, \\ -\infty < t < +\infty$$

$$P(t) = \int p(t) dt = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\lambda_n} (\alpha_n \sin \lambda_n t - \beta_n \cos \lambda_n t),$$

alors il existe une constante  $C$  telle que:

$$|P(t)| \leq C. \quad (-\infty < t < +\infty)$$

Pour arriver à ce dernier résultat, l'auteur considère la fonction analytique de  $s = \sigma + it$ , p.p. dans  $\sigma \geq 0$ :

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^N (\alpha_n + i\beta_n) e^{-\lambda_n s}$$

et démontre que:

$$R\{\varphi(s)\} \leq \frac{4}{\pi} \arctg e^{-\sigma} \quad \left(0 \leq \arctg e^{-\sigma} \leq \frac{\pi}{4}; \quad \sigma \geq 0\right)$$

De là, on conclut facilement que la fonction:

$$P_2(t) = \int P(t) dt = - \int_0^{+\infty} d\omega \int_{\omega}^{+\infty} R\{\varphi(s)\} d\sigma$$

est inférieure en module à  $\frac{\pi^2}{8}$ , et enfin que:  $|P(t)| \leq \frac{\pi}{2}$ . L'auteur montre que la valeur  $\frac{\pi}{2}$  est la meilleure possible au moyen d'un exemple pris dans les polynômes trigonométriques. J. Favard (Grenoble).

**Kershner, Richard: Determination of a van der Corput-Landau absolute constant.** Amer. J. Math. 57, 840—846 (1935).

In einem endlichen Intervall  $[a, b]$  sei  $f(x)$  reell,  $f''(x)$  vorhanden und  $\geq r$ , wo  $r$  positiv und von  $x$  unabhängig ist. Dann gibt es nach van der Corput und Landau eine numerische Konstante  $\gamma$ , so daß

$$(1) \quad \left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \gamma r^{-1/2}.$$

Durch einfache reellanalytische Überlegungen (Betrachtung von Kosinussen) zeigt Verf.: Bedeutet  $\mu_0$  die einzige Wurzel von

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2 - \mu}} \sin(x^2 + \mu) dx = 0$$

im Intervall  $-\pi/2 \leq \mu < \pi/2$ , und wird

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{\pi - 2\mu_0}{r}}, \quad \gamma_0 = 2\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2 - \mu_0}} \cos(x^2 + \mu_0) dx, \quad f_0(x) = \frac{rx^2}{2} + \mu_0$$

gesetzt, so ist

$$(2) \quad \left| \int_a^b \cos f(x) dx \right| \leq \int_{-\beta_0}^{\beta_0} \cos f_0(x) dx = \gamma_0 r^{-1/2}.$$

Da  $f_0(x)$  im Intervall  $[-\beta_0, \beta_0]$  die obigen Bedingungen erfüllt, so zeigt (2), daß  $\gamma_0$  der kleinste zulässige Wert von  $\gamma$  in (1) ist und daß  $\gamma_0$  für  $f_0(x)$  angenommen wird. Für  $\mu_0$  und  $\gamma_0$  gibt Verf. folgende Näherungswerte an (die ich nicht nachgeprüft habe):  $\mu_0 = -0,725 \dots$ ,  $\gamma_0 = 3,327 \dots$ , die bis auf  $\pm 0,002$  genau sein sollen. Walfisz.

**Quade, E. S.: A generalized Parseval's relation.** Bull. Amer. Math. Soc. 41, 711 bis 718 (1935).

Let  $\Phi(u)$  and  $\Psi(v)$  be a pair of functions conjugate in the sense of Young [Proc. Roy. Soc. A 87, 225—229 (1912)], i.e.  $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$ , and the derivatives  $\Phi'(u)$



and  $\Psi'(v)$  are non-negative and non-decreasing functions vanishing at the origin and inverse to each other. Let  $\{K_n(s, t)\}$  be a sequence of kernels defined on the square  $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ . The paper gives a number of necessary and sufficient conditions that the relation

$$\int_0^1 y(s) ds \int_0^1 x(t) K_n(s, t) dt \rightarrow \int_0^1 x(s) y(s) ds$$

should hold for every pair of functions  $x(t)$  and  $y(s)$  such that  $\Phi(\lambda|x(t)|)$  and  $\Psi(\mu|y(s)|)$  are integrable  $L$  for some constants  $\lambda > 0, \mu > 0$ . A. Zygmund.

**Offord, A. C.:** The uniqueness of a certain trigonometric integral. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 382—389 (1935).

Observations on a theorem of Verblunsky (this Zbl. **10**, 60 and 486). This theorem may be obtained by combining two of the author's theorems, but the author's main concern is to relax the conditions of validity. He proves: Let

$$\int_0^\infty e^{-\sigma u} [f(u) \cos xu + g(u) \sin xu] du$$

be summable  $(C)$  to a bounded function  $J(\sigma, x)$  for  $\sigma > 0$ . Then  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} J(\sigma, x) = F(x)$  exists for almost all  $x$ ,  $J(\sigma, x)$  is the Poisson transform of  $F(x)$ , and the functions  $f(u)$  and  $g(u)$  are  $(C, 1)$ -Fourier cosine and sine transforms of  $F(x)$  resp. Verblunsky had assumed convergence of the integral, and even

$$\int_0^\infty e^{-\sigma u} [|f(u)| + |g(u)|] du < \infty.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

**Pi Calleja, Pedro:** Über die Konvergenzbedingungen der komplexen Form des Fourier-schen Integrals. Math. Z. **40**, 349—374 (1935).

Die Fouriersche Umkehrformel  $2\pi f(x) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-iu(t-x)} dt$  zerfällt für reelle  $f(x)$  in die Formeln

$$(1) \pi f(x) = \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(t-x) dt, \quad (2) 0 = \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u(t-x) dt,$$

deren Gültigkeit mit dem Bestehen der Limites (für jedes  $\delta > 0$ )

$$(*) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^\delta f(t+x) \frac{\sin \lambda t}{t} dt, \quad (**) \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^\delta f(t+x) \frac{1 - \cos \lambda t}{t} dt$$

zusammenhängt. Verf. beschäftigt sich ausführlich mit dem Zusammenhang von (2) und (\*\*). Nach klassischen Resultaten ist die Konvergenz der rechten Seite von (1) mit der Existenz von (\*) äquivalent, falls  $f(t)$  in  $(-\infty, \infty)$  absolut integrierbar ist, oder dort eine totale beschränkte Variation besitzt und für  $x \rightarrow \pm \infty$  gegen 0 geht, oder die Summe solcher Funktionen ist. Verf. zeigt, daß diese Bedingungen nicht hinreichend sind, um die Äquivalenz der Konvergenzen von (2) und (\*\*) sicherzustellen, daß aber z. B. die Hinzunahme der Bedingung, daß  $\frac{f(t)}{t}$  für  $t \rightarrow \pm \infty$  absolut integrierbar ist, bereits ausreicht. Die vom Verf. angegebenen Kriterien für die Existenz von (\*\*) sind nicht neu, denn es sind dies die bekannten Bedingungen für die Konvergenz der konjugierten Fourierreihe. Aber sein Nachweis, daß die Jordansche Bedingung für die Konvergenz der Fourierreihe nicht mehr für die Konvergenz der konjugierten Reihe ausreicht, dürfte neu sein.

Bochner (Princeton).

**San Juan, R.:** Das Eulersche Summierungsverfahren und die entsprechende Transformation des Laplaceschen Integrals. Ist. Lombardo, Rend., II. s. **68**, 619—624 (1935) [Spanisch].

Soit (1)  $f(z) = \sum \frac{a_n}{z^n}$  une fonction nulle et holomorphe à l'infini, et soit  $D$  le plus petit domaine convexe, à l'extérieur duquel  $f(z)$  est holomorphe. L'auteur démontre

qu'à chaque point  $z$  extérieur à  $D$  on peut faire correspondre un paramètre complexe tel que l'algorithme correspondant d'Euler appliqué à la série (1) converge en  $z$ ; au contraire si  $z$  est intérieur à  $D$ , l'algorithme d'Euler diverge quel que soit le paramètre. — La démonstration est immédiate si  $D$  est un polygone; dans le cas contraire, l'auteur se sert de la transformation  $LEL^{-1}$ , où  $L$  est la transformation de Laplace et  $E$  l'algorithme d'Euler. La proposition précédente est valable pour cette transformation, que l'auteur appelle „corrélatrice de Laplace“, et l'auteur en déduit sa validité pour l'algorithme d'Euler. Vlad. Bernstein (Milano).

**Karamata, Jovan:** Quelques théorèmes de nature tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries. Bull. Acad. Sci. Math. Nat., Belgrade Nr 2, 169—205 (1935).

This paper contains a large number of related Tauberian theorems, the prototype of which is the theorem that for  $x \rightarrow \infty$ ,  $F(x) \rightarrow a$  and  $F''(x)$  bounded imply  $F'(x) \rightarrow 0$ . The author's central theorem C, from which all his results flow, reads: For  $x \geq 0$  let  $\alpha(x) \uparrow \infty$  as  $x \uparrow \infty$ ,  $\alpha(x) = \alpha(x+0)$ ; let  $\varphi(x)$  be the inverse of  $\alpha(x)$ ,  $\varphi(x) = \varphi(x-0)$ ;  $X = \varphi(\alpha(x) + \varepsilon)$ ;  $\Phi(x) > 0$ ,  $m\Phi(x) \leq \Phi(x') \leq M\Phi(x)$  for  $x \leq x' \leq X$  where  $m$  and  $M$  are fixed; let  $\varrho(x)$  and  $f(x)$  be integrable with respect to  $\alpha(x)$ , and let  $\varrho(x)$  satisfy the same conditions as  $\Phi(x)$ . From

$$\int_0^x f(t) d[\alpha(t)] = o[\Phi(x)], \quad x \rightarrow \infty,$$

follows  $f(x) = o[\Phi(x)]$  each time  $f(x)$  satisfies

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \min_{x \leq x' \leq X} \frac{\varrho(x') f(x') - \varrho(x) f(x)}{\varrho(x) \Phi(x)} > o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Applications to the inversion of the rule of l'Hospital. Among applications to infinite series may be quoted Theorem K': Let  $P_n = \sum_1^n p_r$  satisfy  $0 < P_n < P_{n+1} \sim P_n$ , and let  $\varrho_n$  satisfy  $(\varrho_n - \varrho_{n-1})/\varrho_n = O[(P_n - P_{n-1})/P_n]$ . From  $\sum_1^n s_r p_r / P_n \rightarrow s$  follows  $s_n \rightarrow s$ , if in addition

$$\varrho_{n+1} s_{n+1} - \varrho_n s_n > O[\varrho_n p_n / P_n].$$

E. Hille.

**Grünwald, Géza:** Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome. Acta Litt. Sci. Szeged 7, 207—221 u. Mat. fiz. Lap. 42, 107—125 u. deutsch. Zusammenfassung 126 (1935) [Ungarisch].

Le présent travail apporte une contribution importante à la question de divergence possible des polynômes interpolateurs de Lagrange relatifs à une fonction continue  $f(x)$  pour les noeuds  $x_k = \cos(k - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{n}$  de Tchebycheff. L'auteur démontre, en particulier, qu'il existe une fonction continue  $f(x)$  dans l'intervalle  $(-1, +1)$  telle que la suite des polynômes interpolateurs  $L_n(f(x))$  correspondants soit presque partout non bornée (donc divergente) dans l'intervalle  $(-1, +1)$ . Il construit dans ce but deux fonctions  $g(x)$  et  $h(x)$  continues pour  $-1 \leq x \leq 1$  jouissant de la propriété qu'en chaque point  $x_0 \neq -1$  de l'intervalle  $(-1, +1)$  l'une au moins des suites interpolatrices  $L_n(g(x_0))$  et  $L_n(h(x_0))$  soit non bornée. Il en résulte alors qu'il ne peut exister qu'un ensemble dénombrable de valeurs  $\lambda$  pour lesquelles la fonction  $f_\lambda(x) = g(x) + \lambda h(x)$  pourrait posséder une suite de polynômes interpolateurs  $L_n(f_\lambda(x))$  bornée dans un ensemble  $E_\lambda$  de mesure positive. — On sait que la question analogue relative aux séries de Fourier reste encore en suspens. S. Bernstein (Leningrad).

**Broggi, U.:** Sugli sviluppi in serie di polinomi di Laguerre. Atti Accad. naz. Lincei Rend., VI. s. 22, 108—112 (1935).

Let  $\varphi(t) = \sum_0^\infty \alpha_n t^n / n!$  be an entire function of exponential type. The author proves the existence of a  $\lambda_0 \geq 0$  such that for  $\lambda > \lambda_0$ ,  $\varphi(t) = \sum_0^\infty h_n L_n(\lambda t)$ , where the series is uniformly convergent in any finite domain and the  $h_n$  are the coefficients



of the expansion of  $f(z) = \sum_0^\infty \alpha_n z^{-n}$  in powers of  $(z - \lambda)/z$ . — The inequalities given for  $\lambda_0$  are neither nec. nor suff.; a reconstruction of the argument shows that  $\lambda_0 \leq \max(0, 2\mu)$ , where  $\mu$  is the convergence abscissa of the Laplace integral of  $\varphi(t)$ , and this limit is the best possible of its kind. The theorem is not essentially new, however; S. Wigert [Ark. f. Mat. **15**, no. 25, 16—17 (1921)] proved such an expansion

for  $\lambda = 1$  when  $\limsup_n |\alpha_n| = h < 1/2$ , he found  $h_n = (-1)^n \sum_n \binom{k}{n} \alpha_k$  and  $\limsup_n |\overline{h_n}| \leq h/(1-h)$ . This result gives  $\lambda_0 \leq 2h$ ,  $h$  arbitrary. — The Laplace transform of  $L_n(t)$  should be credited to Sonine, Math. Ann. **16**, 42 (1880). E. Hille.

**Broggi, U.:** Su di un sistema di infinite equazioni lineari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **22**, 120—124 (1935).

For problem and notation, see the preceding review. It is supposed that  $\lambda = 1$ , and that  $h_n = \int_0^\infty e^{-t} L_n(t) \varphi(t) dt$  exists for all  $n$ , further  $f(z)$  is regular for  $\Re(z) > 1 - \varepsilon$ .

The infinite system of linear equations

$$(-1)^n \sum_n \binom{k}{n} x_k = \alpha_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

has the formal solution

$$x_n = (-1)^n \sum_n \binom{k}{n} \alpha_k,$$

convergent to the sum  $h_n$  when  $h < 1$ . For  $h \geq 1$ , the author attempts to prove that the series is Borel summable to  $h_n$ . The result is correct though the proof is invalid. In particular, the author's conclusion that  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^m \varphi^{(n)}(t) = 0$  uniformly in  $m$  and  $n$  is obviously impossible. E. Hille (New Haven, Conn.).

**Ríos, Sixto:** Die Überkonvergenz der Laplace-Stieltjesschen Integrale. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, 47—50 (1935) [Spanisch].

Voranzeige einiger Sätze, die bekannte Überkonvergenzsätze von Ostrowski und Bourion vom Gebiete der Taylorsche und Dirichletschen Reihen auf das Gebiet des Laplaceschen Integrals verallgemeinern. Vlad. Bernstein (Milano).

**Rajchman, A.:** Un complément au théorème Riesz-Fischer. Bull. int. Acad. Polon. Sci. A **1935**, 235—243.

The Riesz-Fischer theorem asserts that, if  $\sum a_n^2$  converges and  $\{\varphi_n(x)\}$  is an orthonormal system of functions over an interval  $(a, b)$ , then there is a function  $f(x) \in L^2$  such that (\*)  $\int_a^b f \varphi_n dx = a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). In the paper it is shown that, if  $f(x)$  is an arbitrary function such that  $\int_a^b f^2(x) dx = \varrho^2 < \infty$ , and  $\{a_n\}$  is an arbitrary sequence of numbers such that  $\sum a_n^2 = \varrho^2$ , then there is an orthonormal system  $\{\varphi_n(x)\}$  for which (\*) holds. Thence follows in particular that the well-known extension of the Riesz-Fischer theorem, which was obtained by F. Riesz [Math. Z. **18**, 117—124 (1923)] for the case of uniformly bounded orthonormal systems, is not true for general orthonormal systems. A. Zygmund (Wilno).

**Hardy, G. H., and J. E. Littlewood:** Notes on the theory of series. XVIII: On the convergence of Fourier series. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 317—323 (1935).

The paper contains proofs of two theorems, one of which was stated by them without proof in a previous paper [this Zbl. **11**, 154] and was proved by Zygmund by a different method. The second theorem reads as follows. Let  $f(\theta)$  be real and even and its Fourier series  $(\dagger) a/2 + \sum_1^\infty a_n \cos n\theta$  converge to 0 at  $\theta = 0$ . All these

restrictions are unessential and the result can be immediately extended to the most general Fourier series. Let  $(*) f(\theta) = o(\log^{1/\theta})^{-1}$  for small positive  $\theta$  and let  $s^*, s_2^*, \dots$  be the sequence of absolute values of partial sums of  $(\dagger)$  rearranged in decreasing order. Then  $\sum_1^n s_v^*/(v+1) = o(\log n)$ . — This theorem contains as corollaries various known results, among them the theorem on strong summability,  $\sum_1^n |s_v|^q = o(n)$ ,  $q > 0$ , provided  $(*)$  is satisfied, and also that  $s_n \rightarrow 0$  provided  $(*)$  is satisfied and in addition  $a_n > -An^{-q}$ . The authors raise but leave open the question whether the same result will hold if  $(*)$  is replaced by the weaker assumption  $\int_0^\theta |f(t)| dt = o(1/\log(1/t))$ .

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

**Moore, Charles N.: On criteria for Fourier constants of  $L$ -integrable functions of several variables.** Duke math. J. 1, 293—297 (1935).

This note connects with previous work of the author and of L. Cesari (this Zbl. 7 345; 8, 205 and 9, 108 resp.). The analysis is carried through for two variables with suff. indications for extensions. Let  $A_{mn}$  and  $C_{mn}$  be related by

$$\sum A_{mn} x^m y^n \sim [\sum C_{mn} x^m y^n]^{-1}.$$

Let 
$$S_{mn}(x, y, p, q) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q C_{m-i, n-j} \cos ix \cos jy,$$

where the prime indicates that  $\cos 0$  is to be replaced by  $1/2$ . Let  $l_{mn}, \lambda_{mn}$  be positive and such that

$$(1/l_{mn}) |S_{mn}(x, y, p, q)| < K, \quad (1/\lambda_{mn}) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_{mn}| dx dy < K'.$$

Finally let

$$L(a_{mn}) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} A_{ij} a_{m+i, n+j}.$$

Suppose that  $a_{mn}$  is such that  $a_{mn} \rightarrow 0$  as  $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , and as  $m$  (or  $n$ )  $\rightarrow \infty$ ,  $n$  (or  $m$ ) being fixed, and

$$\sum \sum [l_{mn} + \lambda_{mn}] |L(a_{mn})| < \infty.$$

Then the  $a_{mn}$  are the Fourier cos-cos coefficients of an  $L$ -integrable function. Special suff. conditions

$$\sum \sum m^r n^r |A_{r+1, r+1} a_{mn}| < \infty, \quad r > 0,$$

or

$$\sum \sum \log(m+2) \log(n+2) |A_{mn}| < \infty. \quad E. Hille.$$

**Samatan, E.: Über Summation eines besonderen Typus von Folgen und Reihen.** Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 32, 230—247 (1935) [Spanisch].

Lorsque  $u_k/u_{k-1} = (ak+b)/(ck+d)$ , la somme de la série  $\sum u_k$  se calcule aisément lorsque l'on connaît une fonction  $f(k)$  pour laquelle  $u_k/u_{k-1} = [1+f(k-1)]/f(k)$  (v. Rey-Pastor, Rev. Soc. Mat. Española 1911). — L'auteur étudie ici le cas où la fonction  $f(k)$  peut être prise égale à un polynôme ou à un quotient de polynômes. Le cas particulier où  $f(k)$  se réduit à une fraction linéaire a été traité par l'auteur dans un travail antérieur (v. ce Zbl. 9, 346). Vlad. Bernstein (Milano).

### Differentialgleichungen:

**Toyoda, Kôshichi: On groups of linear differential equations. I.** Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 284—302 (1935).

The author writes a linear system of the first order in the form  $y' = ay$ , where  $y$  and  $a$  are, respectively, unknown and given square matrices of order  $n$  whose elements are continuous functions of  $x$ . A fundamental set of solutions is denoted by  $y(x, \xi)$  with  $y(\xi, \xi) = I$ , the identity matrix. Chapter I develops results which can be found in Schlesinger's Vorlesungen. Chapter II establishes results which can be paraphrased



somewhat as follows. (1) If  $b(x)$  is a square matrix of order  $n$ , the relations  $b(x)y(x, \xi) = y(x, \xi)b(x)$  and  $[a, b] \equiv a(x)b(\xi) - b(\xi)a(x) = 0$  are equivalent. (2) If  $[a, b] = 0$  and  $z(x, \xi)$  satisfies  $z' = bz$ , then  $y(x, \xi)z(x, \xi)$  satisfies  $u' = (a+b)u$ . (3) Let  $A$  be a set such that  $\lambda a_1 + \mu a_2$  belongs to  $A$  whenever  $a_1$  and  $a_2$  belong to  $A$  and  $\lambda, \mu$  are constants. If the matrix  $a$  is chosen from  $A$ , the solution  $y(x, \xi)$  belongs to a set  $G$ . Necessary conditions that  $G$  be a group are given. *Thomas* (Durham).

**Pryce, M. H. L.: On a uniqueness theorem.** Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 625—628 (1935).

Für zwei nahe verwandte partielle Differentialgleichungen wird die Eindeutigkeit der Lösung bei geeigneten Randbedingungen bewiesen; nämlich für die in der Bornschen Elektrodynamik vorkommende Gleichung (1) mit  $\alpha = -1$  und die für eine Minimalfläche im vierdimensionalen Raum geltende Gleichung (1) mit  $\alpha = +1$ :

$$\operatorname{div} \frac{\operatorname{grad} \Phi}{\sqrt{1 + \alpha (\operatorname{grad} \Phi)^2}} = 0. \quad (1)$$

*P. Jordan* (Rostock).

**Hodgkinson, J.: Harmonic functions with polyhedral symmetry.** J. London Math. Soc. **10**, 221—226 (1935).

Functions of this type (i.e., harmonic functions having the same planes of symmetry as some regular solid) were first considered by Poole (see this Zbl. **4**, 64). The author provides an alternative approach. Attention is fixed on icosahedral symmetry. Let the icosahedron  $I$  have its center of figure at the origin in the space  $(x, y, z)$ . From geometrical considerations, and following Kline, Vorlesungen über das Ikosaeder (1884), to some extent, the author obtains three homogeneous polynomial forms  $A, B', C''$ , of the second sixth and tenth degrees respectively in  $A_0 = z, A_1 = x + iy, A_2 = x - iy$ , which have the same planes of symmetry as  $I$ . He then indicates a proof that, if  $H(x, y, z)$  is a spherical harmonic of order  $2m$ , then  $H$  can be written as a polynomial in  $A, B', C''$ , and thus arrives at Poole's theorem that  $H/r^{4m+1}$ ,  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ , can be written as polynomial operator in Poole's operators  $P, Q$  operating on  $1/r$ . A method is given by which  $r^{2m+1} P^p Q^q$ ,  $p, q$  integers, can be calculated in terms of  $A, B', C''$ .

*J. J. Gergen* (Rochester).

**Hansen, W. W.: On the expansion of Green's function.** Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **21**, 326—330 (1935).

The method of finding the expansion of the Green's function of a linear inhomogeneous partial differential equation developed by the author is applicable when the homogeneous equation is separable. To illustrate the method the case of Poisson's equation in three variables is considered. Laplace's equation is separated into three total differential equation two of which are eigenvalue equations determining the separation constants. Products of solutions of these two equations form a complete orthogonal set in terms of which the density function in Poisson's equation may be expanded. The coefficients being functions of the variable  $x_3$  occurring in the last of the total equations. By considering only that part of the density function in the shell between  $x'_3$  and  $x'_3 + dx'_3$  and of this only one term in the expansion in a series of orthogonal functions, a solution of Poisson's equation is built up from solutions of Laplace's equation use being made of functions which are continuous functions of  $x_3$  with discontinuous first derivatives. To obtain a general solution a summation is made over all the terms of the orthogonal expansion and the result is integrated with respect to  $x'_3$ . The coefficient of the density in the resulting expression, when it is removed from the volume integral, is the desired expansion of the Green's function. Some examples are given to illustrate the method. *H. Bateman* (Pasadena).

**Perkins, F. W.: The Dirichlet problem for domains with multiple boundary points.** Trans. Amer. Math. Soc. **38**, 106—144 (1935).

The author extends the theory of the Dirichlet problem in space to the case in which the domain (bounded, open continuum)  $T$  has multiple boundary points, and the

boundary values depend on the manner of approach. The paper is divided into three parts. In Part I the author introduces the notion of a boundary element. These elements correspond to Carathéodory's prime ends, though in the Carathéodory case of a simply-connected plane region, they are not identical with the latter. [In this connection see Kaufmann, *Math. Ann.* **103**, 70—144 (1930) and this *Zbl.* **4**, 74, where the general plane and space case are treated and prime ends are defined which are identical with the Carathéodory prime ends in the Carathéodory case.] We note the following three definitions and two theorems. The first is equivalent to but not the same as that given by the author. (1) A boundary element  $\gamma$  of  $t$ , where  $t$  is the boundary of  $T$ , is an infinite sequence of point sets  $\{G'_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , having the following properties: (a)  $T + t \supset G'_1 \supset G'_2 \supset \dots$ ; (b)  $G'_i$  contains at least one point of  $t$ ; (c)  $G'_i$  can be written as the sum of a domain plus its boundary, the domain lying in  $T$ ; (d) the set  $g_i$  of boundary points of  $G'_i$  contained in  $T$  is at non-zero distance from  $g_j$ ,  $i \neq j$ ; (e) the diameter of  $G'_i \rightarrow 0$  with  $1/i$ . The elements  $\gamma: \{G'_i\}$ ,  $\bar{\gamma}: \{\bar{G}'_i\}$  are regarded as identical if each  $G'_i[\bar{G}'_i]$  is contained in some  $\bar{G}'_i[G'_i]$ . (2) The point set  $E$  contains  $\gamma: \{G'_i\}$  if  $E \supset G'_i$  for some  $i$ . (3)  $E$  is contained in  $\gamma$  if  $E \subset G'_i$  for every  $i$ . (I) A boundary element contains one point of  $t$  and no other point. (II) The point  $p \in t$  is contained in a boundary element if, and only if, it is accessible. Part II is devoted to the study of single-valued functions  $f(\gamma)$  and  $F(P)$ ,  $P$  a point in  $T$ . The notions (a)  $F(P)$  tends to  $c$  at  $\gamma$ , (b)  $f(\gamma)$  is pseudo-continuous at  $\gamma_1$ , (c)  $F(P)$  tends uniformly to  $f(\gamma)$ , (d)  $f(\gamma)$  is uniformly pseudo-continuous on  $t$  are defined in terms of spherical regions  $\mathfrak{S}(\gamma, \varrho)$ . Given  $\gamma: \{G'_i\}$  and  $0 < \varrho$ . Let  $i$  be the smallest integer such that  $G'_i \subset S'$ , where  $S'$  is the sphere of radius  $\varrho$  about the point  $p$  contained in  $\gamma$ . Then  $\mathfrak{S}(\gamma, \varrho)$  consists of those points, together with their limit points, which can be joined to a point of  $G'_i$  by a continuous curve lying in  $T \cdot S$ , where  $S$  is the interior of  $S'$ . As for (a) and (b), (a) holds [(b) holds] is for each  $0 < \varepsilon$  there is a  $0 < \delta$  such that  $|F(P) - c| < \varepsilon$  [ $|f(\gamma) - f(\gamma_1)| < \varepsilon$ ] for  $P \in \mathfrak{S}(\gamma, \delta)$  [ $\gamma \in \mathfrak{S}(\gamma_1, \delta)$ ]. The definitions for (c) and (d) follow in the usual way. Fundamental among the results obtained in this part are an extension of Lebesgue's theorem on the continuation of continuous functions, and an extension Weierstrass' theorem on approximation. In Part III the author attacks the Dirichlet problem of determining for each  $f(\gamma)$ , bounded and uniformly pseudo-continuous on  $t$ , a function  $U_f(P)$ , harmonic in  $T$ , which tends uniformly to the boundary values  $f(\gamma)$ . Following the ordinary theory (see, for example, Kellogg's *Foundations of Potential Theory*) he sets up for each  $f(\gamma)$  a "sequence solution". The properties of these solutions are analogous to those of the ordinary type. In particular it is found that, for  $\gamma$  fixed,  $U_f(P)$  tends to  $f(\gamma)$  at  $\gamma$  for every  $f$  if, and only if, a pseudo-barrier for  $\gamma$  [i. e., a function  $V_\gamma(P)$ , continuous and superharmonic in  $T$ , which tends to 0 at  $\gamma$ , and has a positive lower bound in  $T$  outside every  $\mathfrak{S}(\gamma, \varrho)$ ,  $0 < \varrho$ ] exists. The author closes his paper with the theorem that, if  $T$  is normal in the ordinary sense, then his general Dirichlet problem always admits a solution.

J. J. Gergen (Rochester).

**Doetsch, Gustav:** Thetarelationen als Konsequenzen des Huygensschen und Eulerschen Prinzips in der Theorie der Wärmeleitung. *Math. Z.* **40**, 613—628 (1935).

Man kann die Lösung der Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung in einem Punkte  $P$  auf dem Umwege berechnen, daß man zunächst die Randwerte auf dem Rande eines  $P$  enthaltenden Bereiches  $\mathfrak{B}'$  (der im Innern des ursprünglichen Bereiches liegt) berechnet und dann die Randwertaufgabe für  $\mathfrak{B}'$  löst („Huygenssches Prinzip“). Gleichsetzen der so erhaltenen mit der direkten Lösung liefert, wenn die Lösung durch Integrale über Greensche Funktionen gegeben ist, eine transzendente Relation für die Greensche Funktion, die meist ein Additionstheorem ist. Häufig erhält man die gleiche Relation einfacher, indem man die Greensche Funktion als Lösung auffaßt und sie durch die Lösungsformel darstellt („reflexives Prinzip“). Da bei gewissen Randwertaufgaben der linearen Wärmeleitungsgleichung  $U_{xx} = U_t$  die



Greenschen Funktionen sich in einfacher Weise aus  $\vartheta$ -Funktionen zusammensetzen, erhält Verf. durch Anwendung des Huygensschen bzw. reflexiven Prinzips (sowohl in der  $x$ - wie in der  $t$ -Richtung) Additionstheoreme solcher Funktionen. In entsprechender Weise werden solche Additionstheoreme durch Anwendung des von Verf. so genannten Eulerschen Prinzips (dies. Zbl. 7, 14) gewonnen, das darin besteht, eine Lösung einer partiellen Differentialgleichung als Lösung zweier verschiedener Randwertaufgaben (bei gleichem Grundgebiet) aufzufassen und die beiden so erhaltenen Lösungsformeln einander gleichzusetzen. Die aufgestellten transzendenten Relationen leitet Verf., soweit sie Faltungsgintegrale enthalten, noch auf einem anderen Wege ab: Durch Anwendung der Laplacetransformation gehen die transzendenten Relationen in algebraische über; kennt man umgekehrt die letzteren, so erhält man durch Rückübersetzung die ersteren. Die in Rede stehenden algebraischen Relationen kann man so erhalten: Durch Anwendung der Laplacetransformation geht die betreffende partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche über. Aus dieser ergeben sich die algebraischen Relationen mit Hilfe des Huygensschen bzw. Eulerschen Prinzips.

*E. Rothe (Breslau).*

**Tychonoff, A.: Théorèmes d'unicité pour l'équation de la chaleur.** Rec. math. Moscou 42, 199—215 (1935).

Die Arbeit bringt eine ausführliche Darstellung der von Verf. unter gleichem Titel (vgl. dies. Zbl. 11, 115) angeführten Ergebnisse. Unter Benützung von Funktionen  $F(t)$ , die nebst allen Ableitungen für  $t = 0$  verschwinden, ohne identisch zu verschwinden, wird zunächst gezeigt, daß die Lösung von  $u_{xx} = u_t$  durch Vorgabe von  $u(x, 0)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) nicht eindeutig bestimmt ist. Ferner wird gezeigt, daß das in der Theorie der Wärmeleitungsgleichung auftretende Poissonsche Integral für alle  $x$  und alle  $t > t_0$  konvergiert und eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung darstellt, wenn es für  $x, t_0$  konvergiert. Unter Verschärfung eines Satzes von E. E. Levi (Ann. di Mat. 1908) wird eine Bedingung für das Wachstum von  $u(x, t)$  (als Funktion von  $x$ ) angegeben, unter welcher die Lösung der obigen Aufgabe eindeutig ist und durch das Poissonsche Integral geliefert wird. Eine andere Bedingung für die Darstellbarkeit einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch das Poissonsche Integral bezieht sich auf die Funktionen  $u(0, t)$  und  $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ . In entsprechender Weise wird die Randwertaufgabe für die Halbgerade ( $u$  vorgeschrieben für  $t = 0$ ,  $x > 0$  und  $x = 0$ ,  $t > 0$ ) behandelt, deren Lösung sich ebenfalls als nicht eindeutig erweist (in Übereinstimmung mit den bekannten, in anderer Weise erhaltenen Resultaten von G. Doetsch). Sodann wird die „Fouriersche“ Aufgabe behandelt, eine Lösung  $u(x, t)$  der Wärmeleitungsgleichung zu finden, die für  $x \geq 0$ ,  $t > -\infty$  stetig ist, wenn  $u(0, t)$  vorgegeben ist. Wiederum ist die Lösung nicht eindeutig bestimmt; ist die  $n$ -te Ableitung der Lösung nach  $x$  beschränkt, so ist die Lösung bestimmt bis auf ein Polynom höchstens  $n$ -ten Grades. Zum Schluß betrachtet Verf. die Aufgabe, eine Lösung  $u$  der Wärmeleitungsgleichung für  $x \geq 0$ ,  $-\infty < t \leq t_0$  zu finden, wenn  $u(x, t_0)$  gegeben ist (inverses Wärmeleitungsproblem). Die Lösung ist nicht eindeutig bestimmt, wird dies aber unter der Nebenbedingung, daß eine  $n$ -te Ableitung nach  $x$  beschränkt ist.

*E. Rothe (Breslau).*

**Guigue, René: Lignes asymptotiques et équation de la chaleur.** Enseignement Math. 33, 322—348 (1935).

Verf. gibt Bedingungen dafür an, wann die Differentialgleichung (1):  $z_{yy} + f(x, y)z_x = 0$  durch Transformation der unabhängigen Veränderlichen auf die Form  $z_{\eta\eta} + z_\xi = 0$  gebracht werden kann. Es werden eine Reihe von Anwendungen besprochen; insbesondere wird ausführlich die Differentialgleichung behandelt, die bei dem Problem auftritt, diejenigen Flächen zu bestimmen, für die die Projektionen der einen Asymptotenschar in die  $(x-y)$ -Ebene gegeben sind; diese Differentialgleichung läßt sich nämlich durch geeignete Transformationen stets auf die

Form (1) bringen. Mit gruppentheoretischen Methoden ist das angegebene Problem der Flächenbestimmung von Buhl in einer Reihe von Arbeiten behandelt worden [J. de Math., V. s. 10 (1904) u. IX. s. 8 (1929); Nouvelles Ann. Math., IV. s. 8 (1908); 9 (1909); 10 (1910)].

E. Rothe (Breslau).

**Golusin, G. M.:** Auflösung eines ebenen Wärmeleitungsproblems in einem von isolierender Schichte umgebenen mehrfachzusammenhängenden Kreisbereiche. Rec. math. Moscou 42, 191—198 u. deutsch. Zusammenfassung 198 (1935) [Russisch].

Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 10, 207). Mit Hilfe seiner Methode wird jetzt eine kompliziertere Aufgabe gelöst: das ebene Wärmeleitungsproblem für mehrfach zusammenhängende Kreisbereiche, wobei die Wärmeleitungseigenschaften Unstetigkeitskreise haben können.

Janczewski (Leningrad).

**Held, E. F. M. van der:** Die mathematische Behandlung der Abkühl- und Aufheizerscheinungen in aus Schichten von verschiedenen Substanzen aufgebauten Mauern. Physica 2, 943—951 (1935).

Verf. behandelt die Wärmeleitung in einer aus parallelen Schichten verschiedener Materialien bestehenden Wand. In der  $p$ -ten Schicht gilt die Wärmeleitungsgleichung  $\frac{\partial \theta}{\partial t} = a_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$  mit konstantem  $a_p$ . Zur Lösung in der  $p$ -ten Schicht stellt Verf. als Ansatz eine unendliche Summe über  $(A_{np} \cos \alpha_{np} x + B_{np} \sin \alpha_{np} x) e^{-\beta_n^2 t}$  mit  $\alpha_{np} = \beta_n / \sqrt{a_p}$  auf. Die auftretenden Konstanten werden aus den Anfangs- und Randbedingungen sowie den im vorliegenden Fall noch hinzutretenden Stetigkeitsbedingungen an der Grenze zweier Schichten bestimmt. Verf. vergleicht seine rechnerische Methode mit einer von Schmidt (Festschrift zum 70. Geburtstag August Föppl, Berlin 1924) angegebenen graphischen.

E. Rothe (Breslau).

**Germay, R.-H.-J.:** Sur des systèmes d'équations intégral-différentielles du second ordre à deux variables indépendantes. I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 207—212 u. 257—261 (1935).

**Germay, R.-H.-J.:** Sur des systèmes d'équations intégral-différentielles à deux variables indépendantes généralisant les équations aux dérivées partielles de M. Ét. Delassus. II. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 261—266 u. 291—293 (1935).

### Spezielle Funktionen:

**Pearson, Karl, and Margaret V. Pearson:** On the numerical evaluation of high order incomplete Eulerian integrals. Biometrika 27, 409—423 (1935).

Im Gegensatz zur  $\Gamma$ -Funktion  $\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$ , die nur für  $0 < p \leq 1$  berechnet zu werden braucht, muß die unvollständige  $\Gamma$ -Funktion  $\Gamma_x(p) = \int_0^x e^{-x} x^{p-1} dx$  für alle  $p > 0$  (und  $0 < x < 1$ ) tabuliert werden. In seinen „Tables of the Incomplete  $\Gamma$ -Function“ (London 1922) hatte der Verf. eine solche 7stellige Tafel bis zur „Ordnung“  $p \leq 51$  veröffentlicht. In der vorliegenden Arbeit gibt er nun an, wie man die Berechnung der unvollständigen  $\Gamma$ -Funktion mit  $p > 51$  auf die in den genannten Tafeln verzeichneten Werte der Funktion mit  $p \leq 49$  zurückführen kann. Ähnlich bei der unvollständigen B-Funktion. — Das Integral  $I'(x, p) = \Gamma_x(p) / \Gamma(p)$  ist das Wahrscheinlichkeitsintegral der Häufigkeitskurve  $y = y_0 e^{-x} x^{p-1}$  mit den Kennzeichen: mode =  $p - 1$ , Mittelwert =  $p$ , Streuung =  $\sqrt{p}$ . Zur Berechnung von  $I'$  bezieht Verf. die Variable  $x$  auf den Mode, d. h. er setzt  $x = p - 1 + y$  und zerlegt  $I'$  in einen konstanten Teil mit der oberen Grenze  $p - 1$  und in einen variablen. In letzterem wird nach Potenzen von  $t = y/p - 1$  entwickelt. Dann treten Werte der Funktion  $I'$  (aber von bedeutend niedrigerer Ordnung) auf, multipliziert mit Konstanten, die sich aus dem gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsintegral berechnen lassen und von denen die ersten 13 möglichst explizit angegeben werden. Die Werte von  $I'$  werden



aus der erwähnten Tafel entnommen. Die gesamte Rechenarbeit ist geringer als bei mechanischer Quadratur. Anhaltspunkte für die Approximation werden gegeben. —

Bei der unvollst. B-Funktion bzw. bei  $I_x(p, q) = \int_0^x x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx / B(p, q)$ , wo man o.B.d.A.  $q > p$  annehmen darf, wird der Integrand nach Potenzen von  $x$  entwickelt. Es ergeben sich wiederum Werte von  $I'(x, \alpha)$ , multipliziert mit gewissen Koeffizienten (Funktionen von  $p, q$ ), von denen die ersten 13 wiederum möglichst explizit angegeben werden. — Im Gegensatz zur  $I$ -Funktion ist hier die Methode aber nur günstig für  $p \ll q$ . Sind hingegen  $p, q$  miteinander vergleichbar, so wird der konstante Faktor  $C = \Gamma(p+q) \cdot (q-1)^{-p} / \Gamma(q)$  zu groß. Für diesen Fall ist vielmehr unter den verschiedenen Methoden am besten die Kettenbruchmethode von Müller (Biometrika 22, 291). Bodewig (Basel).

Wise, W. H.: Some Bessel function expansions. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 700 bis 706 (1935).

Verf. macht Gebrauch von der verallgemeinerten Exponentialreihe von Heaviside zur Ableitung einiger asymptotischer Reihen für die Hankelschen Funktionen erster Art  $n$ -ter Ordnung, welche Verallgemeinerungen darstellen solcher Reihen in Watsons Buch über Besselsche Funktionen. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Shastry, N. A.: On simultaneous operational calculus. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 235—240 (1935).

Verf. benutzt den Operatorenkalkül mit mehreren unabhängigen Veränderlichen (von ihm wie im Titel benannt) zur Ableitung einiger unendlicher Integrale über verallgemeinerte Laguerresche Polynome. Hieraus findet er nach längerer Rechnung einfache Summierungen über Reihen, deren Glieder Produkte gewisser, mit Exponentialfunktionen multiplizierter Laguerrescher Polynome sind. Hierauf summiert er auf gleichem Wege eine Reihe, deren Glieder Produkte Besselscher Funktionen enthalten, und erhält als Summe ein bestimmtes Integral. M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Mehrotra, Brij Mohan: A brief history of self-reciprocal functions. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 209—227 (1935).

Although the subject of self-reciprocal functions in its present form is of recent origin, the author shows that particular self-reciprocal functions have occurred in the writings of various mathematicians, beginning with Laplace in 1811. He gives a historical account of the work that has been done in the subject up to the year 1932.

W. N. Bailey (Manchester).

### **Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:**

Pankraz, Otomar: Sur une équation intégrale. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. 34, 17—18 (1933).

Résumé (sans démonstrations) de quelques résultats concernant une équation intégrale reliée aux équations différentielles de la „lutte pour la vie“ de V. Volterra.

A. Khintchine (Saratow).

Conforto, F.: Sul calcolo di un particolare funzionale per le funzioni, che lo rendono stazionario. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 785—790 (1935).

Let

$$L(\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_n) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx + F$$

in which  $\Phi$  is a quadratic polynomial in the  $\varphi_i$  and their derivatives up to the  $n$ -th order, with functions of  $x$  as coefficients, and  $F$  is a quadratic polynomial in the values of  $\varphi_i$  and their derivatives at  $x_1$  and  $x_2$  with constant coefficients. This note obtains a reduced form for  $L$ , when the  $\varphi_i$ 's are such as to make  $L$  stationary, i.e. satisfy the Euler equations. In the reduced form the corresponding  $\Phi$  and  $F$  are first degree in the  $\varphi$ 's and their derivatives.

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Kantorowitsch, L.:** Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen. (Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen erster Art.) *Compositio Math.* 2, 406—416 (1935).

A function  $K(x, y)$ ,  $L^2$  integrable on  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , is said to be closed in  $y$  if  $\int_0^1 \varphi(x) K(x, y) dx = 0$  for  $\varphi$  of  $L^2$  has a consequence  $\int_0^1 \varphi^2 = 0$ . Two necessary and sufficient conditions for closure are proved: (a) for each  $f$  of  $L^2$  and for every  $\epsilon$  there exists a  $\varphi_\epsilon(y)$  such that  $\int_0^1 \left[ \int_0^1 K(x, y) \varphi_\epsilon(y) dy - f(x) \right]^2 dx < \epsilon$ ; (b) a generalisation of the Parseval theorem for a sequence of functions: for every  $f(x)$  of  $L^2$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\int \cdots \int}_m \left[ \int \Delta_m(y_1 \dots y_m | x) f(x) dx \right]^2 / \Delta_m(y_1 \dots y_m) \Delta_{m-1}(y_1 \dots y_{m-1}) dy_1 \dots dy_m = \int_0^1 (f(x))^2 dx$$

where  $\Delta_m(y_1 \dots y_m)$  is the Gramian of  $K(x, y_i)$ , viz. the determinant of  $\int K(x, y_i) K(x, y_j) dx$  and  $\Delta_m(y_1 \dots y_m | x)$  differs from the Gramian  $\Delta_m(y_1 \dots y_m)$  in that the last column contains  $K(x, y_i)$  instead of  $\int K(x, y_m) K(x, y_i) dx$ .

Hildebrandt (Ann Arbor).

**Tricomi, Francesco:** Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione. *Comment. math. helv.* 8, 70—87 (1935).

Remarks on linear functional transformations  $T$  such that from  $f(s) = T[F(t)]$  follows  $f'(s) = T[F'(t)]$ . (1) If

$$T[F(t)] = \int_a^b K(s, t) F(t) dt,$$

and  $[K(s, t) F(t)]_{t=a}^b$  can be disregarded, author concludes that  $K(s, t) = K(s - t)$ . (2) Transformations of the type

$$\int_{-\infty}^{\infty} N(s - \kappa - \lambda t) F(\kappa + \lambda t) dt$$

have the required property under sufficiently severe restrictions on  $F$ . (3) These transformations form a group. (4)  $T\{P^n\}$  is a system of Appell polynomials. (5) Example: Hermitian polynomials. (6) Discussion of Gauss' transformation  $\mathfrak{G}^{(m)}[F]$  with the kernel  $K(u) = (2\pi m)^{-1/2} \exp[-u^2/(2m)]$ , and its inverse  $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}$ . (7) Group property  $\mathfrak{G}^{(m_1)} \mathfrak{G}^{(m_2)} = \mathfrak{G}^{(m_1+m_2)}$ . Further, in terms of the symbol of differentiation  $D$ ,  $\mathfrak{G}^{(m)}[F] = \exp[mD^2/2]F$ ,  $\overline{\mathfrak{G}}^{(m)}[F] = \exp[-mD^2/2]F$ . (8) Relation between the Hermitian series and the associated power series  $\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}\left[\sum_0^{\infty} c_n x^n\right] = \sum_0^{\infty} c_n H_n(x)$ . If  $F$  satisfies a linear differential equation  $E = 0$ ,  $f$  satisfies the equation  $\overline{\mathfrak{G}}^{(1)}[E] = 0$ . (9) Computation of  $\mathfrak{G}^{(1)}[J_0(t)]$  by various methods. — The methods and results of (1)—(4) do not go much beyond those of Pincherle, quoted by the author. Most of the contents of (5)—(8) is also implicitly or explicitly in the literature, with the possible exception of the group property. In particular, a discussion of the Gauss' inversion problem and its various relations to Hermitian series has been given by the referee in *Ann. of Math.*, II. s. 27 (1926).

E. Hille (New Haven, Conn.).

### Variationsrechnung:

**Kosambi, D. D.:** An affine calculus of variations. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 2, 333—335 (1935).

The word "affine" is used in the sense of "non-metric". The author studies the differential geometry of a system of  $n$  differential equations of order  $\sigma + 1$ :

$$(1) \quad x^{(\sigma+1)} + \alpha^h(x, x, \dots, x, t) = 0; \quad x^i = d^\nu x^i / d t^\nu.$$



A differential operator which carries a vector  $u^h(x, x, \dots, x, t)$  into a vector and is distributive in addition is defined by  $Du^h = du^h/dt + \gamma_i^h u^i$ . The equations of variation of the system (1) determine an intrinsic connection  $((\sigma + 1) \gamma_i^h = \partial \alpha^h / \partial x^i)$ . A set of differential invariants can be obtained by alternating the differential operations  $\partial / \partial x^i$ ,  $D$  and  $\partial / \partial t$ . A necessary and sufficient condition for the existence of a metric is that the equations of variation are self-adjoint. The author treats the case  $\sigma = 0$  in detail. For  $\sigma = 1$ , the theory has been worked out in a former paper (this Zbl. 11, 82).  
J. Haantjes (Delft).

**Lefschetz, S.: On critical sets.** Duke math. J. 1, 392—412 (1935).

The theory of critical points is extended to the case of a metric space on which is defined a real continuous function  $f(x)$  with the axioms: every locus  $A^y: f(x) \leq y$  is compact and HLC (locally connected in the sense of homology, see this Zbl. 11, 180); and every locus  $U^y: f(x) < y$  is shrinkable away from any point of the locus  $B^y: f(x) = y$ . A point of  $B^y$  from which  $A^y$  cannot be chain-shrunk onto  $U^y$  is called critical. The modular Betti numbers  $B^p(A^y, U^y)$  are the type numbers for the value  $y$ , corresponding to a definition used earlier by A. B. Brown at the suggestion of Lefschetz. (See this Zbl. 2 21. Brown had obtained his results with another definition, before receiving the suggestion.) All the usual theorems and relations are derived, and some extensions of the hypotheses are given. In application to critical points of functions on a topological manifold, which for convenience is taken analytical instead of simply regular as with Morse, the boundary is allowed to have singularities, and some restrictions on the function at the boundary are removed, thus giving a somewhat more general situation than that treated by Morse and van Schaack (this Zbl. 10, 28 and 11, 357). The work of Morse and van Schaack just mentioned covers roughly the same ground, and in both cases an analytical critical point may not be an abstract (Morse) or topological (Lefschetz) critical point. Lefschetz obtains the erroneous conclusion (Theorem XI) that the analytical (permissibly degenerate) and topological critical points coincide in the region. That this is not true is shown by the example  $y = x^2, -1 \leq x \leq 1$ . The point  $x = 0$  is an analytical critical point but not a topological critical point. A. B. Brown.

### **Funktionentheorie :**

**Rogosinski, Werner: Berichtigung zu dem Nachtrag meiner Arbeit: Zum Schwarzschen Lemma.** Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 45, 243 (1935).

Vgl. dies. Zbl. 10, 307.

**Rey Pastor, J.: Über die algebraisch-logarithmischen Singularitäten der analytischen Funktionen.** Bol. Semin. mat. Argent. 4, 41—46 (1935) [Spanisch].

R. Jungen a complété de façon suivante un théorème bien connu de Fabry (v. ce Zbl. 3, 119): si la fonction (1)  $f(x) = \sum c_n x^n$  ne possède sur le cercle de convergence de (1) que des singularités algébro-logarithmiques, dont l'une  $\alpha$  de „poids“ supérieur à celui des autres, le rapport  $c_n/c_{n+1}$  tend vers  $\alpha$  lorsque  $n$  croît indéfiniment en parcourant la suite de tous les entiers, sauf une certaine suite exceptionnelle de densité nulle. Dans la présente Note l'auteur démontre de façon très simple le théorème inverse de celui de Jungen. Il commence par un exposé assez détaillé du cas où l'on suppose que  $c_n/c_{n+1}$  tend vers  $\alpha$  pour  $n \rightarrow \infty$  (sans suite exceptionnelle); il ne consacre ensuite que quelques lignes au cas général, mais il promet de reprendre la question à une prochaine occasion. — Dans une Note parue à peu près en même temps que celle de l'auteur (Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 780; ce Zbl. 12, 261), le soussigné a démontré le même théorème; l'idée de la démonstration est au fond la même, mais il faut dire que M. Rey-Pastor lui a donné une forme plus simple (tout au moins pour le cas qu'il considère en détail). Vlad. Bernstein (Milano).

**Minetti, Silvio:** Sur les familles normales de fonctions analytiques. Bull. Sci. math., II. s. 59, 199—204 (1935).

Sämtliche Sätze sind in der Formulierung des Verf. falsch. Sie werden richtig, aber trivial, wenn man ein abgeschl. Teilgebiet des zugrunde gelegten Gebiets betrachtet.

*L. Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

**Toidzé, D.:** Sur les fonctions entières. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 764—766 (1935).

L'auteur étudie d'abord l'ordre dans une direction d'une fonction entière d'ordre

fini  $\varrho$ ,  $f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_{\mu} z^{\lambda_{\mu}}$ , présentant des lacunes. Il donne (sans démonstration) ce

résultat. Si pour une suite de valeurs  $\mu = \mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), on a  $\lambda_{\mu+1} > \lambda_{\mu}^{1+\delta}$ ,  $\delta > 0$  (\*), et si l'ordre de  $|f(re^{i\varphi})|$  pour  $r \rightarrow \infty$  et  $\varphi = \alpha = \text{const}$  est inférieur à  $\varrho$ , l'ordre du maximum  $\pi(r, \alpha)$  des nombres  $|\Delta_k(re^{i\varphi})|$  pour  $r \rightarrow \infty$  et  $\varphi = \alpha$  est aussi inférieur à  $\varrho$ ;  $\Delta_k(z)$  désigne la somme des termes de  $f(z)$  dont le degré  $\lambda_{\mu}$  est compris entre  $\lambda_{\mu_k}$  et  $\lambda_{\mu_{k+1}} + 1$ . Inversement, si une fonction d'ordre  $\varrho$ ,  $f(z)$ , est une somme de polynômes  $\Delta_k(z)$ , chacun d'eux formé de termes successifs du développement taylorien, et si, dans une direction  $\varphi = \alpha = \text{const}$ , l'ordre de  $\pi(r, \alpha)$  est inférieur à  $\varrho$ ,  $f(z)$  est la somme d'une fonction présentant des lacunes vérifiant la condition (\*) et d'une fonction d'ordre inférieur à  $\varrho$ . L'auteur donne un résultat plus précis en supposant  $f(z)$  du type moyen  $\sigma$ , de l'ordre  $\varrho$  et en remplaçant la condition (\*) par  $\lambda_{\mu+1} > (1 + \delta) \lambda_{\mu}$ . En introduisant la fonction associée de Borel, il déduit de là des th. d'Ostrowski sur l'ultraconvergence (S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1921, 24; 1923, 21). *G. Valiron*.

**Scott, Sheila:** On the asymptotic periods of integral functions. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 543—554 (1935).

L'Aut. complète et précise les théorèmes de Whittaker [Proc. Edinburgh Math. Soc. 3 (1933); 4 (1935); ce Zbl. 10, 308, 309]. La définition plus précise de la période asymptotique est:  $\beta \neq 0$  est période asymptotique d'une fonction entière ou méromorphe  $f(z)$  si  $\Delta_{\beta}(z) = f(z + \beta) - f(z)$  est ou bien d'ordre moindre que  $f(z)$ , ou bien du même ordre mais de type inférieur. La méthode de Nörlund déjà utilisée par Whittaker (loc. cit.) montre que,  $f(z)$  étant entière d'ordre fini et  $\omega \neq 0$ , il existe une fonction  $g(z)$  du même ordre et du même type telle que  $g(z + \omega) - g(z) \equiv f(z)$ . Un théorème de Carlson (une fonction entière  $f(z)$  nulle pour les  $z$  positifs et entiers est identiquement nulle si  $\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r}$  est inférieur à  $\pi$ ) conduit à l'extension

d'un th. de Whittaker: si  $\sigma = 0$ ,  $f(z)$  n'a pas de période asymptotique; si  $\sigma > 0$ , il n'y a pas de période asmp. de module moindre que  $\pi/\sigma$ . L'emploi de th. de R. Nevanlinna et de Miss M. L. Cartwright (ce Zbl. 10, 121) fournit des renseignements plus précis, par exemple: si  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{r} < \sigma$ , il n'existe pas de période asymptotique  $\beta$

telle que  $\Delta_{\beta}(z)$  soit d'ordre moindre que 1. Enfin l'Aut. étend les résultats concernant les propriétés de l'ensemble des périodes asymptotiques. (Remarque du Réf. Pour traiter toutes les f. entières avec la même approximation il conviendrait d'introduire l'ordre précisé.)

*G. Valiron* (Paris).

**Zmorowitsch, W.:** Über eine konforme Abbildung. I. Mitt. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 9, 29—32 (1934).

The author bases his work on an extension of the Schwarz-Christoffel formula given by Achyesser for the mapping function of a doubly connected region bounded by two simple closed polygons on a circular ring. The author discusses the case that these two polygons are line segments. In this case the integrations are actually carried out and the geometrical nature of some of the constants is indicated. *W. Seidel*.

**Haimovici, M.:** Sur l'écoulement des liquides pesants dans un plan vertical. Ann. Sci. Univ. Jassy 21, 182—231 (1935).

Aus der Betrachtung einer Aufgabe der ebenen Hydrodynamik entsteht folgendes Problem: Man sucht nach einer komplexen holomorphen Funktion  $\omega = \vartheta + i\tau$  der



komplexen Veränderlichen  $z = x + iy$  in dem Halbkreis  $|z| \leq 1$ ,  $y \geq 0$ , mit den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \Phi \left[ \int_0^x \frac{e^{-\tau} d\tau}{1-x^2} \right], & \text{für } y=0, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ \tau &= \mu \int_{\pi}^{\sigma} \frac{e^{-3\tau} \sin \vartheta}{\sin \sigma} d\sigma, & \text{für } z = e^{i\sigma}, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

Auf Grund der Formel, die eine holomorphe Funktion  $\omega = \vartheta + i\tau$  in dem Halbkreis  $|z| \leq 1$ ,  $y \geq 0$  mit vorgeschriebenen Werten für  $\vartheta$  auf dem Halbmesser und für  $\sigma$  auf dem Kreisrand gibt, bestimmt Verf. die sukzessiven Approximationen  $\omega_n(z) = \vartheta_n + i\tau_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) in solcher Weise, daß die Gleichungen, die man aus (A) erhält, indem man  $\vartheta, \tau$  links durch  $\vartheta_n, \tau_n$  und rechts durch  $\vartheta_{n-1}, \tau_{n-1}$  ersetzt, befriedigt werden. Als erste Approximation setzt man  $\vartheta_0 = \tau_0 = 0$ . Es wird bewiesen, daß alle dabei auftretenden Integrale sinnvoll sind, während die  $\vartheta_n(x), \tau_n(x), \omega_n(z)$  stetige, gleichmäßig beschränkte Funktionen darstellen. Die Konvergenz der Folge  $\omega_n(z)$  gegen eine holomorphe Funktion  $\omega(z)$ , die man als die einzige Lösung des Problems anerkennt, wird endlich unter einigen wenig einschränkenden Voraussetzungen bewiesen.

G. Cimmino (Napoli).

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

Lévy, Paul: Sur l'application du théorème de Fubini au calcul des probabilités. Enseignement Math. **33**, 265—270 (1935).

Nach beiläufigen Bemerkungen über nichtmeßbare Mengen wird eine Vereinfachung zu der Berichtigung zu einer früheren Arbeit angegeben [Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **3** und **4** (1934 und 1935); dies. Zbl. **10**, 70 und **11**, 125]. (Fubinis Satz = Zurückführung eines Gebietsintegrals auf zwei einfache Integrationen.) W. Feller.

Feller, Willy: Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Z. **40**, 521—559 (1935).

Die gegenseitig unabhängigen zufälligen Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  mögen bzw. den Verteilungsgesetzen  $V_1(x), V_2(x), \dots, V_n(x), \dots$  gehorchen.  $W_n(x)$  sei das Verteilungsgesetz der Summe  $\sum_{\kappa=1}^n x_{\kappa}$ . Man sagt, die Folge der  $x_{\kappa}$  unterliege dem Laplace-Ljapounoffschen Grenzwertsatz, wenn für passend gewählte  $a_n > 0, b_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(a_n x + b_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

ist. Bisher waren nur hinreichende Bedingungen für diesen Sachverhalt bekannt. Vorliegende Abhandlung bringt als wesentlichstes Ergebnis ein notwendiges und hinreichendes Kennzeichen für die Gültigkeit des Grenzwertsatzes. Man definiere für jedes  $n$  und jedes  $\delta > 0$   $p_n(\delta)$  als die kleinste Zahl mit

$$\sum_{\kappa=1}^n \int_{|x| > p_n(\delta)} dV_{\kappa}(x) \leq \delta.$$

Dann ist die Bedingung, daß für jedes  $\delta > 0$  bei  $n \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{p_n^*(\delta)} \sum_{\kappa=1}^n \int_{|x| < p_n(\delta)} x^2 dV_{\kappa}(x) \rightarrow \infty$$

sei, für die Gültigkeit des Laplace-Ljapounoffschen Satzes notwendig und hinreichend; im positiven Fall ergibt sich auch eine Regel zur Auffindung passender  $a_n$  und  $b_n$ . Ist speziell  $V_1(x) \equiv V_2(x) \equiv \dots \equiv V(x)$  (gleichverteilte Summanden), so ergibt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $V(x)$  dem „Attraktions-

bereich“ der Gaußschen Verteilung angehöre: Ist  $Z = Z(\zeta)$  die kleinste Zahl mit

$$\int_{|x| > Z} dV(x) \leq \zeta,$$

so muß für  $\zeta \rightarrow 0$

$$\frac{1}{\zeta Z^2} \int_{|x| \leq Z} x^2 dV(x) \rightarrow \infty$$

gelten. — Es sei bemerkt, daß das letzte Ergebnis unabhängig vom Verf. und von einander auch P. Lévy und der Ref. gefunden haben; P. Lévy hat auch den allgemeinen Fall erledigt; die bezüglichen Abhandlungen erscheinen alsbald. — Schließlich ist zu erwähnen, daß sich die bekannten hinreichenden Bedingungen von Lindeberg, wie Verf. zeigt, für den von ihm betrachteten Spezialfall (normierte Streuungen) auch als notwendig erweisen.

A. Khintchine (Saratow).

**Batiele, Edgar: Le problème de la répartition.** C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 862 bis 864 (1935).

Der Verf. untersucht den folgenden Spezialfall eines von ihm früher studierten Verteilungsproblems: Es ist die Wahrscheinlichkeit  $\omega_0^n$  zu berechnen dafür, daß bei zufallsmäßiger Aufteilung von  $m$  Gegenständen in  $n$  Gruppen keine dieser Gruppen mehr als  $p$  Gegenstände enthält. Für große  $n$  und  $m$  gilt die asymptotische Formel  $\omega_0^n = (1 - (1 - \alpha)^{n-1})^p$ , wo  $\alpha = p/m$ . Es wird ferner die Aufteilung in  $n$  „Abteilungen“ statt Gruppen untersucht, wobei gemeint ist, daß einige „Abteilungen“ leer bleiben können; dieser Fall kann auf den vorhergehenden zurückgeführt werden. Den Schluß der Note bilden zwei praktische Anwendungen.

Bruno de Finetti.

**Laughlin, Harry H.: The probability-resultant.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 601—610 (1935).

**Kolmogorov, A.: Deviations from Hardy's formula in partial isolation.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 129—132 (1935).

The author treats mathematically the problem: a population with constant number  $N$  of members disintegrates into  $s$  partial populations containing  $n$  specimens each ( $N = sn$ ); free crossing occurs in each partial population; in addition to this every generation of each partial population gives on an average  $k$  roving specimens which, independent of their origin, join at random some partial population where they participate in producing the next generation. Hardy's formula, yielding concentrations of  $q^2$ ,  $pq$ ,  $p^2$  respectively for types  $AA$ ,  $Aa$  and  $aa$ , is realized in each partial population. The existence of an optimum of partial isolation for the selection of recessive genes established qualitatively by A. A. Malinovskij, is confirmed by this theory. The formulas obtained reduce to those of S. Wright, Genetics **16**, 97—157 (1931), for the case of free crossing over.

Albert A. Bennett (Providence).

**Joseph, A. W.: Further notes on the sum and integral of the product of two functions.** J. Inst. Actuar. **65**, 277—309 (1934).

The main subject of the paper is the development of formulae for truncated and central sums of the product of two functions following the line of development used by the author in an earlier paper (see this Zbl. **7**, 202) but it also contains considerable auxiliary matter. He modifies the definition of Aitken's operator  $\Theta$  (J. Inst. Actuar. **61**, 107) so that  $n! \Theta^n 1$  produces a true factorial which is simply related to Steffensen's general factorial (see this Zbl. **7**, 220), and which he applies to the summation of central factorials. Turning to weighted Tchebychef polynomials, he derives summation formulae given by Jones (J. Inst. Actuar. **64**, 318) but with a remainder term. The remainder of the paper is largely taken up with finding explicit forms of the remainder terms in the Legendre and Tchebychef expansions obtained for the integral and sum of the product of two functions in his earlier paper.

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.).



**Wilks, S. S.:** Test criteria for statistical hypotheses involving several variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* **30**, 549—560 (1935).

This paper is a very useful summary of the significance tests for samples from multivariate normal populations now available, using criteria of the Pearson-Neyman likelihood type, employing generalized sample variances, the idea and the sampling theory of which are largely the work of Hotelling and the author. *C. C. Craig.*

**Baker, G. A.:** Note on the distributions of the standard deviations and second moments of samples from a Gram-Charlier population. *Ann. math. Statist.* **6**, 127—130 (1935).

In this note the author states the form of the distribution function for second moments about a fixed point in samples of  $n$  from a population whose frequency law is a Gram-Charlier series but he does not set it down explicitly. He also obtains the correlation function for the mean and standard deviation in samples of 2 from a population distributed according to the first 3 terms of the Gram-Charlier series and obtains the like result for samples of 3 if only 2 terms of the Gram-Charlier series characterizes the population. *C. C. Craig* (Ann Arbor, Mich.).

**Neyman, J.:** On the problem of confidence intervals. *Ann. math. Statist.* **6**, 111 bis 116 (1935).

This paper considers the question of confidence intervals or fiducial limits in the case of discontinuous distributions. In particular, it gives an answer to a question raised by R. A. Fisher in the discussion of a paper by Neyman (*J. Roy. Statist. Soc.* **97**, 589) about obtaining statements concerning confidence intervals in the form of inequalities instead of exact probabilities. In the present paper it is shown that only in some exceptional cases does an exact solution exist, and that in the general case of distributions, exact probability statements in the problem of confidence intervals are impossible (see also this *Zbl.* **10**, 72). *H. L. Rietz* (Iowa).

**Hirschfeld, H. O.:** A connection between correlation and contingency. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **31**, 520—524 (1935).

Es ist bekannt, um wieviel die Anwendung der Korrelationsanalyse leichter und sicherer wird, wenn die sog. Regressionsgleichungen linear sind. Verf. weist nun nach, daß im Falle zweier korrelierter Variabler, die zu einer Gesamtheit („Population“) unendlichen Umfanges gehören, es immer mindestens eine praktisch realisierbare Möglichkeit gibt, durch entsprechende Transformation der Variablen lineare Regressionen zu erreichen. Eine interessante Beziehung zwischen den Korrelationskoeffizienten für derart transformierte Variable und Pearsons „Mean Square Contingency“ wird abgeleitet. *O. Anderson* (Sofia).

**Meyer, H. Arthur, and W. Edwards Deming:** On the influence of classification on the determination of a measurable characteristic. *J. Amer. Statist. Assoc.* **30**, 671 bis 677 (1935).

**Cramér, H., and H. Wold:** Mortality variations in Sweden. A study in graduation and forecasting. *Skand. Aktuarie Tidskr.* **18**, 161—241 (1935).

Zum erstenmal wird hier eine zweidimensionale analytische Ausgleichung einer Sterblichkeitsentwicklung durchgeführt durch Ausgleichung nach dem Prinzip der kleinsten Quadrate der zeitlichen Variation der Konstanten in der Makehamformel (\*)  $\mu(x, t) = \alpha_t + \beta_t e^{t/x}$  für die Sterblichkeit eines  $x$ -jährigen zur Zeit  $t$ . Die Parameter  $\alpha_t$  usw. werden berechnet durch Anpassung von (\*) an die Erfahrung 1. für feste Werte von  $t$  (Kalenderjahr), 2. für feste Werte von  $t - x$  (Geburtsjahr). Das ergibt zwei unabhängige Ausgleichungen, welche für extrapolatorische Zwecke benutzt werden. — Von Interesse bei der Durchführung ist u. a. eine neue Ausgleichungsmethode (regula falsi mit beigefügten Hilfstabellen) für logistische Kurven sowie die Berechnung von  $z = f(t, x)$ , für welche die Kurven  $t = \text{konst.}$  und  $t - x = \text{konst.}$  von der Form (\*) sind. — Die Durchführung der Aufgabe war möglich nur auf Grund der einzigartigen zeitlichen Ausstreckung und Zuverlässigkeit der benutzten älteren schwedischen Bevölkerungsstatistik (1800—1930). *W. Feller* (Stockholm).

**Pankraz, Otomar:** Integralgleichung für die Aktiven-Ordnung in der Invalidenversicherung. Acad. Tchèque Sci., Bull. int. **34**, 12—14 (1933).

Kurze Mitteilung über die in dies. Zbl. **8**, 370 und **9**, 407 referierten Untersuchungen.  
*Birnbaum* (Lwów).

**Thalmann, W.:** Veränderungen im Deckungskapital und in der Prämie einer Pensionskasse bei Verschiebungen des Rücktrittsalters. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. **30**, 1—12 (1935).

**Dasen, Ed.:** Note sur le calcul du taux de rendement des placements effectués pour une période inférieure à un an. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. **30**, 23—33 (1935).

**Möschler, Werner:** Untersuchungen über Eintrittsgewinn und Fehlbetrag einer Versicherungskasse. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. **30**, 129—185 (1935).

## Numerische und graphische Methoden.

**Ottestad, Per:** Methode zur Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl mit besonderer Rücksicht auf die Verwendung der Rechenmaschine. Norsk mat. Tidsskr. **17**, 65—72 (1935) [Norwegisch].

Aus der bekannten Darstellbarkeit der Quadratzahlen als Summe ungerader Zahlen wird eine auf sukzessive Subtraktionen gegründete Methode abgeleitet, die Quadratwurzel einer beliebigen Zahl zu bestimmen.  
*Nyström* (Helsingfors).

**San Juan, Ricardo:** Compléments à la méthode de Gräffe pour la résolution des équations algébriques. Bol. Semin. mat. Argent. **4**, 55—58 (1935).

Vgl. dies. Zbl. **11**, 265.

**Uno, Tosio:** Sur la théorie des transformations dans la nomographie. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. **17**, 353—358 (1935).

Verf. stellt sich die Aufg., die Transformationen zu bestimmen, die eine Fluchtlinientafel für drei Veränderliche wieder in eine Fluchtlinientafel verwandeln. Er behandelt den Fall, in dem zwei Leitern der gegebenen Tafel und ihre transformierten Leitern geradlinig sind, und diskutiert die dabei auftretenden Möglichkeiten.

*Rehbock* (Bonn).

**Le Besnerais, Maurice:** Emploi pratique de la série de Fourier. Tableaux de calculs. (39. sess., Paris, 11.—14. VI. 1935.) Bull. Assoc. techn. Marit. Aéronaut. Nr **39**, 261—295 (1935).

Ausgehend von der angenäherten harmonischen Analyse einer periodischen Funktion durch Konstruktion des trigonometrischen Polynoms  $y = a_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ ,

das durch  $2n$  Punkte  $(x_i, y_i)$  der Funktion (numerisch gegeben oder aus einer Kurve abgelesen) bestimmt ist, gibt Verf. für die Bestimmung der  $(a_k, b_k)$  aus den  $(x_i, y_i)$  (Analyse) und umgekehrt (Synthese) unter Benutzung der Rungeschen „Faltung“ Rechenschemata für  $n = 10, 12, 18, 20, 24$  und  $60$  (letzteres Schema nur für gerade Funktionen). (Im wesentlichen stimmen die Schemata überein mit den Vordrucken von Runge-Emde [neue Ausgabe von der Universität Edinburgh] und den Schablonen von Terebesi.) Welches  $n$  man wählt, hängt davon ab, durch wieviel Punkte der Funktionsverlauf einigermaßen eindeutig festgelegt erscheint. Hat die Funktion Unstetigkeiten, so ersetzt Verf. sie zunächst zeichnerisch durch eine stetige Funktion, welche sie möglichst gut annähert: an Sprungstellen wählt er das arithmetische Mittel der zwei Ordinaten als Funktionswert, in Ecken ersetzt er mit Hilfe einer kleinen Konstruktion die Ordinate durch eine andere, die einer Abrundung der Ecke entspricht. Dann ermittelt er für diese stetige Funktion die Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms. Ein Beispiel, aus der Hydrodynamik, demonstriert besonders die Wirksamkeit der Eckenausrundung.

*S. Gradstein* (Eindhoven).



**Popeseo, Al. Th.:** Note sur l'article de M. E. Abason: Sur la méthode de Thompson et la méthode des discontinuités pour l'analyse des harmoniques des fonctions périodiques. Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest 5, 79—88 (1935).

(Vgl. dies. Zbl. 10, 218.) Verf. macht u. a. darauf aufmerksam, daß bei periodischen Funktionen aus Geradenstücken ohne Sprünge die Berechnung der Fourierkoeffizienten mit Ersatz der Integralausdrücke durch Summen und Anwendung des Eagleschen Korrektionsfaktors bequemer ist als die Berechnung nach der Singularitätenmethode.  
S. Gradstein (Eindhoven).

**Savur, S. R.:** A simple test of value of a particular period in forecasting. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 336—341 (1935).

Verf. schlägt ein Verfahren vor, die Brauchbarkeit von Perioden in Beobachtungsreihen für Voraussagen nachzuweisen. Er benutzt einen Teil der gegebenen Reihe, um daraus den periodisch wiederkehrenden Bestandteil derselben abzuleiten, und setzt dann den letzteren in Korrelation zu dem Rest der Beobachtungsreihe. Die Eignung der Periode für Voraussagen ist erwiesen, wenn der Korrelationskoeffizient positiv und groß ist. Die Ergebnisse einiger Versuche mit konstruierten Beispielen folgen, ferner der Nachweis, daß die von Abbot gefundenen 23jährigen Perioden in Temperatur und Niederschlägen (doppelte Sonnenfleckperiode) für Voraussagen keine Bedeutung haben.  
K. Stumpf (Berlin).

## Geometrie.

**Smid, L. J.:** Eine absolute Axiomatik der Geometrie in einer begrenzten Ebene. Math. Ann. 112, 125—138 (1935).

Das Hjelmslevsche Resultat, daß eine ebene Geometrie, in der die Hilbertschen Axiome I, II, III gelten, sich als Teil einer projektiven Geometrie mit hyperbolischer, elliptischer oder parabolischer Maßbestimmung auffassen läßt, wird hier abgeleitet auch für den Fall, daß das Hilbertsche Axiom III<sub>1</sub> der uneingeschränkten Streckenabtragbarkeit ersetzt ist durch das schwächere Axiom III<sub>1</sub>\*: Zu zwei verschiedenen Strecken  $AB$  und  $A'B'$  gibt es, falls kein Punkt  $C$  der Strecke  $AB$  existiert mit  $AC \equiv A'B'$ , einen Punkt  $C'$  der Strecke  $A'B'$  mit  $A'C' \equiv AB$ . Diese Axiome, die alle für ein begrenztes Ebenenstück formuliert sind, definieren eine „axiomatische Ebene  $\mathfrak{A}$ “. Es folgt zunächst, daß um jeden Punkt von  $\mathfrak{A}$  ein hinreichend kleines Kreisgebiet  $\mathfrak{G}$  existiert, in dem alle gewöhnlichen Kongruenzeigenschaften gelten, so daß sich nach dem Verfahren von Hjelmslev mit Hilfe von Spiegelungen an Geraden so weit uneigentliche Punkte für ein solches Kreisgebiet einführen lassen, daß der Hessensbergsche Beweis des Pascalschen Satzes („Neue Begründung der Sphärik“) anwendbar ist. Damit gilt der Pascalsche Satz bei gewisser Lagebeschränkung der Konfiguration in bezug auf  $\mathfrak{G}$ . Die volle Erweiterung des Gebietes  $\mathfrak{G}$  zu einer projektiven Geometrie kann nun entweder nach dem Vorbild von Hjelmslev beendet werden oder auch so: In  $\mathfrak{G}$  gilt der Pascalsche, also auch der Desarguessche Satz, da auch in der begrenzten Ebene dieser eine Folge von jenem ist (ohne Beweis), damit kann man in der bekannten Weise durch Einführung idealer Elemente  $\mathfrak{G}$  zu einer projektiven Geometrie erweitern, in der die Elemente von  $\mathfrak{A}$  außerhalb von  $\mathfrak{G}$  als Elemente eines Teilgebiets erscheinen. Die projektive Geometrie läßt sich mit Hilfe eines geordneten kommutativen Körpers algebraisieren. Die Einbettung in eine Metrik wird am Schluß mit Hilfe der Bewegungskollineationen skizziert.  
R. Moufang.

**Robinson, R. T.:** Theorems on the tetrahedron. Math. Gaz. 19, 356—364 (1935).

**Altshiller-Court, Nathan:** Sur le tétraèdre isodynamique. Mathesis 49, 345—351 (1935).

**Thébault, V.:** Sur la géométrie du tétraèdre. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 55, 120 bis 132 (1935).

Dixon, A. L.: A proof of Schläfli's theorem about the double six. J. London Math. Soc. 10, 274 (1935).

Albarrán, F.: Über eine Verallgemeinerung der Chordale. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 177—190 (1935) [Spanisch].

Ersetzt man in der Definitionsgleichung  $\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = R^2 - R'^2$  für die Chordale „1. Art“ zweier Kreise mit den Mittelpunkten  $O, O'$  und den Radien  $R, R'$  diese Radien durch  $iR, iR'$ , so erhält man die „Chordale 2. Art“. Ersetzt man die Radien durch  $iR, R'$  oder  $R, iR'$ , so erhält man die beiden „Chordalen 3. Art“ (E. Román, Rev. Acad. Ciencias 1913). Schreibt man nun in der Gleichung eines Kreises  $iR$  statt  $R$ , so tritt an Stelle der Kreispolaren eines Punktes die „Antipolare“ des Punktes, das Spiegelbild der Polaren am Mittelpunkt des Kreises. So ergeben sich Eigenschaften der Chordalen 2. und 3. Art aus Eigenschaften der Chordalen 1. Art, wenn man in den betreffenden Sätzen sinngemäß „Polare“ durch „Antipolare“ ersetzt. Auf diese Weise werden Eigenschaften der verallgemeinerten Chordalen abgeleitet. Insbesondere zeigt sich, daß die Kreise, die zwei vorgegebene Kreise „diametral“ (d. h. in den Endpunkten eines Durchmessers) schneiden, ein Büschel bilden und daß ihre Mittelpunkte die Chordale 2. Art erfüllen. Sucht man dann alle Kreise, die von den Kreisen dieses Büschels diametral geschnitten werden, so erhält man ein quadratisches Kreissystem, das synthetisch und analytisch untersucht wird. Die Enveloppe des Kreissystems ist eine Ellipse. E. A. Weiss (Bonn).

Pomey, Léon: Sur un problème fondamental de la théorie des involutions univariates. J. École polytechn., II. s. cahier 34, 143—152 (1935).

Im Anschluß an frühere Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 2, 147; 4, 17; 7, 72, 74, 420; 9, 81) behandelt der Verf. die Aufgabe, eine durch drei Punktetripel auf einem Kegelschnitt  $\Gamma$  bestimmte Involution  $I_3$  durch ein Kegelschnittnetz von möglichst einfacher Gestalt auszuschneiden. Ein Netz dieser Art wird von den drei Kurven 2. Ordnung aufgespannt, die einen festen Punkt  $d$  von  $\Gamma$  und einen nicht auf  $\Gamma$  gelegenen festen Punkt  $O$  mit je einem der drei vorgegebenen Punktetripel verbinden. Die Kegelschnitte dieses Netzes sind dadurch bestimmt, daß sie durch die Punkte  $d$  und  $O$  laufen und zu einer (im allgemeinen regulären) Kurve 2. Klasse  $K$  apolar sind. Der Verf. zeigt, wie man ein Kurvennetz dieser Art in jedem Falle durch ein einfacheres ersetzen kann, bei dem  $K$  ein Doppelpunkt ist. E. A. Weiss (Bonn).

Weiss, E. A.: Abbildung der Flächen 2. Ordnung auf lineare Ebenenkomplexe im  $R_5$ . S.-B. Berlin. math. Ges. 34, 44—51 (1935).

Bildet man die Geraden eines Raumes  $S_3$  wie üblich auf die Punkte einer  $V_4^2$  im  $S_5$  ab, so entsprechen den zwei Reguli einer Fläche 2. Ordnung zwei Kegelschnitte, deren Ebenen in bezug auf  $V_4^2$  polar sind; bildet man weiter die Ebenen des  $S_5$  auf die Punkte einer  $V_9$  im  $S_{10}$  ab, so erhält man als Abbildung der ursprünglichen Fläche 2. Ordnung ein Punktepaar im  $S_{10}$ . Die zwei Punkte des Paares gehören zwei windschiefen Räumen  $S_9$  an, deren Punkte als Bilder der „erzeugenden“ linearen Ebenenkomplexe der  $V_4^2$  im  $S_5$  erscheinen. Diese Abbildung, die von C. Segre nur für reguläre Flächen 2. Ordnung angegeben worden ist, wird hier im Falle einer singulären Fläche 2. Ordnung untersucht. Ihre Beziehungen mit den linearen Ebenenkomplexen im  $S_5$  gestatten folgende einfache Konstruktion eines solchen Komplexes anzugeben (die die bekannte Chaslessche Konstruktion eines linearen Strahlenkomplexes im  $S_3$  verallgemeinert): Es seien zwei windschiefe in bezug auf  $V_4^2$  polare Ebenen  $F, F'$  vorgegeben; man konstruiere auf  $V_4^2$  alle zu  $F, F'$  gehörigen Polarquadrupel, die aus erzeugenden Ebenen 1. Art (oder 2. Art) bestehen, und zu jedem Polarquadrupel die  $\infty^5$  gemeinsamen Treffebenen; der Ort aller dieser Ebenen ist ein regulärer linearer Erzeugendenebenenkomplex 1. Art (oder 2. Art) der  $V_4^2$ , welcher  $F, F'$  als Kernebenen besitzt. E. G. Togliatti (Genova).



**Jonas, H.:** Über eine Klasse zweifach-unendlicher, durch Bewegung eines starren Geradenpaares erzeugter Systeme. S.-B. Berlin. math. Ges. 34, 52—71 (1935).

Seien  $g(u, v)$  und  $g'(u, v)$  die beiden Geradenkongruenzen, die durch die betrachtete Bewegung des Geradenpaares  $g, g'$  entstehen. Dann läßt sich eine vom Parameter  $t$  abhängende Flächenschar  $x(u, v; t)$  bestimmen, so daß der laufende Flächenpunkt  $x(u, v; t)$  stets auf  $g(u, v)$  liegt und die zugehörige Tangentialebene stets durch  $g'(u, v)$  geht. Ebenso läßt sich eine vom Parameter  $t'$  abhängende Flächenschar  $x'(u, v; t')$  bestimmen, wo der laufende Flächenpunkt auf  $g'(u, v)$  liegt und die zugehörige Tangentialebene durch  $g(u, v)$  geht. Ferner sind auf jeder Fläche beider Scharen die Parameter  $u, v$  die Parameter der Asymptotenlinien. Die Gerade  $xx' = h = h(u, v; t, t')$  berührt infolge der erwähnten Eigenschaften in  $x$  und  $x'$  die zugehörigen Flächen. Bei jedem festen Wertepaar  $t, t'$  sind diese Flächen somit Brennflächen der Kongruenz  $h(u, v; t, t')$ , und diese ist  $W$ -Kongruenz. Somit bestimmen die beiden Kongruenzen  $g, g'$  eine zweiparametrische Schar von  $W$ -Kongruenzen (Scharparameter  $t, t'$ ). Auf diese eigenartige Figur, wegen deren zahlreichen weiteren Gesetzmäßigkeiten auf die Arbeit selbst verwiesen werden muß, kommt Verf. auf dem Weg über die Biegungstheorie des rechtwinkligen hyperbolischen Paraboloids. Auch bestehen Zusammenhänge mit der in dies. Zbl. 9, 374 referierten Arbeit des Verf.

*Cohn-Vossen (Moskau).*

**Goormaghtigh, R.:** Sur l'affinité complexe. Mathesis 49, 337—342 (1935).

**Beck, H.:** Über Ternionen in der Geometrie. Math. Z. 40, 509—520 (1935).

Unter einer Ternion wird eine höhere komplexe Zahl  $X = X_0 E_0 + X_1 E_1 + X_2 E_2$  verstanden, deren Einheiten sich nach den Formeln  $E_1^2 = E_0, E_2^2 = 0, E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_2$  nicht kommutativ multiplizieren. Untersucht wird die 11-gliedrige Gruppe von Transformationen:  $X' = (XC + D)^{-1}(XA + B)$ , deren Transformationen sich eindeutig umkehrbar auf die Punkte eines  $R_{11}$  abbilden lassen, soweit diese nicht zwei Mannigfaltigkeiten  $M_{10}^2$  vom Range 4 angehören. Es wird gezeigt, daß die Gruppe einen von M. Noether [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 5, 68—69 (1896)] angegebenen Typus von Cremonatransformationen realisiert. Sie ist ferner holomorph zur Gruppe der automorphen Kollineationen einer Geraden des projektiven  $R_3$  und damit — vermöge der Geraden-Kugel-Transformation — zur Gruppe der eigentlichen Laguerreschen Transformationen orientierter Ebenen (Blätter) im Kugelraum. Vermöge der Abbildung des Linienkontinuums auf  $M_4^2$  im  $R_5$  ist die Gruppe ferner holomorph zur Gruppe der eigentlichen automorphen Kollineationen der  $M_4^2$ , welche einen Punkt der  $M_4^2$  in Ruhe lassen oder — dual — zur Gruppe der gleichsinnigen Dehnungen eines Euklidischen  $R_4$  mit den Minimal- $R_3$  dieses  $R_4$  als Raumelementen. Diesen Deutungen der Gruppe entsprechend können auch die Ternionen selbst einmal auf die Geraden eines singulären linearen Komplexes, dann auf die Blätter des Kugelraumes und schließlich auf die Minimal- $R_3$  des Euklidischen  $R_4$  abgebildet werden. Diese Abbildungen sind mit Singularitäten behaftet. Singularitätenfrei ist die nahe- liegendste Abbildung, die der Ternion  $x E_0 + y E_1 + z E_2$  den Punkt  $(x, y, z)$  eines affinen Raumes von besonderer Struktur zuordnet.

*E. A. Weiss (Bonn).*

**Szász, Paul v.:** Eine Minimum-Aufgabe über die dem Kreise eingeschriebenen Vielecke. Mat. fiz. Lap. 42, 93—106 (1935) [Ungarisch].

Es wird die folgende Aufgabe gelöst: Unter allen konvexen  $n$ -Ecken, die einem Kreise eingeschrieben sind und den Mittelpunkt des Kreises enthalten (als inneren oder als Randpunkt), dasjenige zu bestimmen, für welches die Quadratsumme der  $n$  Seiten am kleinsten ist. Als Lösung ergibt sich: für  $n = 3$  jedes eingeschriebene Dreieck, dessen eine Seite ein Durchmesser des Kreises ist; für  $n = 4, 5, 6$  dasjenige eingeschriebene  $n$ -Eck, dessen eine Seite ein Durchmesser des Kreises ist und dessen übrige  $n - 1$  Seiten einander gleich sind; für  $n \geq 7$  das eingeschriebene regelmäßige  $n$ -Eck.

*Autoreferat.*

**Yamanouti, Masanori:** On the relations,  $V_v^2 \geq V_{v-1} V_{v+1}$ ,  $V_v^n \geq V_0^{n-v} V_n^v$  etc. in  $n$ -dimensional space. I. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 391—396 (1935).

Es seien  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  konvexe Körper des  $n$ -dimensionalen Raumes und  $t \geq 0$ . Dann gilt für das Volumen des Körpers  $\mathfrak{R}_0 + t\mathfrak{R}_1$

$$V(\mathfrak{R}_0 + t\mathfrak{R}_1) = \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} V_v t^v, \quad (1)$$

wobei die  $V_v$  die gemischten Volumina von  $\mathfrak{R}_0$  und  $\mathfrak{R}_1$  sind. Man vermutet das Bestehen der (für  $v=1$  und  $v=n-1$  bekannten) Ungleichungen

$$V_v^2 \geq V_{v-1} V_{v+1} \quad v=1, 2, \dots, n-1 \quad (2)$$

(vgl. z. B. Bonnesen-Fenchel, Theorie der konvexen Körper, S. 92). Hätte das Polynom (1) in  $t$  lauter reelle (notwendig nichtpositive) Wurzeln, so folgten die Ungleichungen (2) unmittelbar aus Newtons Ungleichungen zwischen den Koeffizienten eines Polynoms mit lauter reellen Wurzeln. Verf. macht nun einen (wie er in einer Fußnote selbst bemerkt) mißglückten Versuch, die Realität aller Wurzeln von (1) zu beweisen. Es sei aber hervorgehoben, daß die Behauptung selbst nicht richtig ist, so daß die Ungleichungen (2) auf diesem Wege nicht bewiesen werden können. Dies läßt sich z. B. so einsehen: Hätte (1) stets lauter reelle Wurzeln, so würde in (2) aus der Gültigkeit des Gleichheitszeichens für ein  $v$  seine Gültigkeit für alle  $v$  folgen (vgl. z. B. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, S. 104—105). Im Fall  $n=3$  ist aber beispielsweise für die Kugel  $\mathfrak{R}_0$  und einen Kappenkörper  $\mathfrak{R}_1$  der Kugel  $V_1^2 = V_0 V_2$  und  $V_2^2 > V_1 V_3$ .

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Subramanian, S.:** The closure property of three curves. Proc. Acad. Sci., Allahabad 5, 7—8 (1935).

Bemerkungen zu einer von Wertheimer behandelten Schließungsaufgabe (vgl. dies. Zbl. 8, 320).

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Toranzos, Fausto I.:** Über die Klassifizierung der Jordanschen Kurven in der projektiven Ebene. Rev. Acad. Ci. exact. Madrid 32, 218—229 (1935) [Spanisch].

Die in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 11, 267) angekündigten Resultate werden bewiesen.

H. Busemann (Kopenhagen).

**Brown, A. B., and M. Halperin:** On certain area-preserving maps. Ann. of Math., II. s. 36, 833—837 (1935).

Es sei  $A$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet der  $x, y$ -Ebene mit endlichem Flächeninhalt  $|A|$ . In  $A$  (evtl. mit Ausnahme eines Punktes  $O$ ) sei  $f(x, y)$  mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehen und  $f_x^2 + f_y^2 \neq 0$ . Für jedes  $a$  eines gewissen Intervalls  $0 < a < a_0$  sei durch  $f(x, y) = a$  eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve  $K$  definiert, und das Gebiet  $A$  (ohne  $O$ ) sei durch diese Kurvenschar gerade einfach überdeckt. Dann kann  $A$  flächentreu auf einen Kreis abgebildet werden, so daß der Inhalt des Kreises gleich dem Inhalt von  $A$  ist und die Kurven  $f(x, y) = a$  in konzentrische Kreise übergehen. Die Abbildung ist eindeutig bestimmt, wenn verlangt wird, daß eine gegebene Jordankurve, die jedes  $K$  genau einmal trifft, in einen ebenfalls gegebenen Radius des Kreises übergehen soll. — Der Satz wird auf Kurvenscharen ausgedehnt, die auf einer gekrümmten Fläche liegen, und auf Kurvenscharen eines Raumstücks.

Kamke (Tübingen).

**Roger, Frédéric:** Sur la relation entre les propriétés tangentielles et métriques des ensembles cartésiens. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 871—873 (1935).

L'auteur énonce la généralisation suivante d'un statement antérieur (cf. ce Zbl. 11, 365): Dans tout ensemble cartésien à  $n$  dimensions, à une exception près de mesure d'ordre  $p$  nulle, le sous-ensemble où le contingent bilatéral laisse échapper une variété linéaire à  $n-p$  dimensions, coïncide avec celui où le contingent bilatéral se réduit à une variété linéaire à  $p$  dimensions et la totalité du contingent à un système de demi-variétés linéaires à  $p+1$  dimensions admettant la précédente pour base. W. Feller.



Cohn-Vossen, S.: Existenz kürzester Wege. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 339 bis 342 (1935).

In einem topologischen Raum  $R$  sei für alle Punktpaare  $a, b$  eine Funktion  $ab$  (Entfernung) definiert mit folgenden Eigenschaften: 1.  $ab > 0$  für  $a \neq b$ ; 2. die Relationen  $p_n \rightarrow p$ ,  $pp_n \rightarrow 0$ ,  $p_n p \rightarrow 0$  sind gleichbedeutend; 3.  $ab + bc \geq ac$ . Aus 2. folgt  $pp = 0$ . Räume, in denen statt 1. nur  $ab \geq 0$  und statt 3. auch eine schwächere Annahme gemacht wird, sind von Menger untersucht worden (vgl. dies. Zbl. 12, 260). Wir sagen, es gelte  $abc$ , wenn  $ab + bc = ac$  ist. Das stetige Bild  $x(t)$  der euklidischen Strecke  $0 \leq t \leq 1$  heißt selbst eine Strecke, wenn für  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq 1$  stets  $x(t_1)x(t_2)x(t_3)$  gilt. Das stetige Bild  $T$  der einseitig offenen Strecke  $0 \leq t < 1$  heiße ein Strahl, falls für  $0 \leq t_1 \leq t_2 < 1$  das Bild von  $t_1 \leq t \leq t_2$  eine Strecke ist und  $T$  in  $R$  abgeschlossen ist. Es werde weiter angenommen: 4. Zu jedem Punkt  $p$  gibt es eine Zahl  $r(p) > 0$  derart, daß für jeden Punkt  $q$  mit  $pq \leq r(p)$  eine Strecke von  $p$  nach  $q$  und für  $pq > r(p)$  ein Punkt  $x$  mit  $px = r$  und  $p x r$  existiert. Dann gilt: Zu jedem Punktpaar  $a_1, a_2$  existiert entweder eine Strecke von  $a_1$  nach  $a_2$  oder ein von  $a_1$  ausgehender Strahl  $T$ , so daß für  $x \in T$  stets  $a_1 x a_2$  gilt. Wenn  $R$  vollständig ist, gibt es zwischen je zwei Punkten eine Strecke. Verf. geht noch darauf ein, was man aussagen kann, wenn die Vollständigkeit durch lokale Kompaktheit ersetzt wird.

H. Busemann (Kopenhagen).

### Algebraische Geometrie:

Schammel, Johannes: Zur Theorie der höheren algebraischen Ortskurven der Wechselstromtechnik. Festschr. Techn. Hochsch. Breslau 1910—1935, 401—431 (1935).

Stellen die deutschen Typen komplexe Zahlen, die griechischen reelle Parameter dar, so ergibt die Parameterdarstellung

$$\Re = \frac{\mathfrak{A}_0 \sigma_1^2 + \mathfrak{A}_1 \sigma_1 \sigma_2 + \mathfrak{A}_2 \sigma_2^2}{\mathfrak{B}_0 \sigma_1^2 + \mathfrak{B}_1 \sigma_1 \sigma_2 + \mathfrak{B}_2 \sigma_2^2} = \frac{\mathfrak{F}_a}{\mathfrak{F}_b}$$

eine Kurve in der Ebene der komplexen Zahlen, und zwar (wenn Zähler und Nenner teilerfremd sind) entweder eine bizirkuläre Kurve 4. Ordnung oder zirkuläre Kurve 3. Ordnung, beide mit Doppelpunkt, oder einen Kegelschnitt, oder aber einen zweimal durchlaufenen Kreis oder eine zweimal durchlaufene Gerade. Die ersten beiden Kurventypen sind Fußpunktskurven von Kegelschnitten und lassen sich nach ihrer anschaulichen Gestalt in 6 bzw. 3 Typen einteilen. Es werden nun rechnerische Kriterien angegeben, die es gestatten, alle diese Typen voneinander zu trennen, und zwar werden dafür die Invarianten der quadratischen Formen  $\mathfrak{F}_a, \mathfrak{F}_b$  und ihrer konjugierten Formen  $\mathfrak{F}_a^*, \mathfrak{F}_b^*$  benutzt. Auch werden Formeln zur Berechnung des Doppelpunktes, des Mittelpunktes (im Kegelschnittfall) usw. aufgestellt. van der Waerden.

Godeaux, Lucien: Sur une classe de courbes algébriques hyperspatiales. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 252—257 (1935).

Considérons trois réciprocités linéairement indépendantes entre deux espaces projectifs,  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ , à  $n$  dimensions. Le lieu des points de  $\Sigma$  auxquels les trois réciprocités font correspondre trois hyperplans d'un même faisceau, c'est-à-dire trois hyperplans ayant un espace  $\sigma'$  à  $n-2$  dimensions commun, est une courbe  $\Delta$  d'ordre  $\frac{1}{2}n(n+1)$  et de genre  $\frac{1}{2}n(n-1)$ . On obtient dans  $\Sigma'$  une courbe  $\Delta'$  analogue, en renversant le rôle des deux espaces  $\Sigma, \Sigma'$ . Chacun des espaces  $\sigma'$  susdits, rencontre  $\Delta'$  en  $\frac{1}{2}n(n-1)$  points; les  $\infty^1$  espaces  $\sigma'$  (qui correspondent dans  $\Sigma'$  aux différents points de  $\Delta$ ) engendrent une hypersurface, d'ordre  $n^2-1$ , pour laquelle la courbe  $\Delta'$  est multiple d'ordre  $\frac{1}{2}n(n-1)$ , et qui possède une variété double à  $n-2$  dimensions (lieu des points communs à deux espaces  $\sigma'$ ) d'ordre  $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)(n^2+n-3)$ . — Cette intéressante recherche (fournissant des résultats connus pour  $n=2, 3$ ), se rattache à un travail récent de l'A. sur les courbes canoniques (cfr. L. Godeaux, ce Zbl. 11, 413).

Beniamino Segre (Bologna).

**Godeaux, Lucien:** Sur une surface algébrique de diviseur deux. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* 4, 288—290 (1935).

**Pedoe, D.:** On the virtual grade of curves on an algebraic surface. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 536—542 (1935).

On sait que toute courbe exceptionnelle d'une surface algébrique est une partie fixe du système canonique (supposé effectif). Ici l'a. pose la question réciproque, à savoir si une partie fixe du système canonique est nécessairement une courbe exceptionnelle; il prouve, à ce propos, que l'affirmation contraire — faite par F. Enriques [*Mem. Soc. Ital. Scienze* 10, 72 (1896)] en se basant sur un exemple de G. Castelnuovo — n'est pas suffisamment justifiée par cet exemple. Le travail contient en plus quelques remarques, concernant le calcul effectif du degré virtuel d'une courbe sur une surface et l'influence qui peut avoir une composante infinitésimale. (Une Note du réf., présentée à l'Accad. Sci. Bologna, donne réponse à ladite question.)

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Scorza, G.:** Sulle varietà di Veronese. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 22, 181—186 (1935).

L'A. commence par faire quelques considérations géométriques générales, relatives aux algèbres régulières d'ordre  $n^2$  (ayant pour éléments les matrices carrées d'ordre  $n$ ); et, à ce propos, il critique vivement un Mémoire récent de G. Andreoli (*Atti Accad. Sci. Napoli*, II. s. 20, Nr 10, 1—31; ce *Zbl.* 12, 289). Après il rappelle la représentation linéaire connue, des quadriques-enveloppe d'un  $S_r$  avec les points d'un espace,  $\Sigma$ , à  $\frac{1}{2}r(r+3)$  dimensions, et considère dans  $\Sigma$  la variété  $F^{(h)}$  (pour  $h = 1, 2, \dots, r$ ) dont les points correspondent aux quadriques-enveloppe de  $S_r$   $h$  fois spécialisées;  $F^{(1)}$  est une hypersurface de  $\Sigma$ , d'ordre  $r+1$ , tandis que  $F^{(r)}$  est une  $V_r^{2r}$  (rapportée à  $S_r$  dans une correspondance birationnelle sans exceptions) nommée par l'A. variété de Veronese d'indice  $r$ , puisqu'elle se réduit précisément à la surface de Veronese pour  $r = 2$ . La correspondance qui associe à un point  $P$  de  $\Sigma$  l'hyperplan  $\pi$  polaire de  $P$  par rapport à  $F^{(1)}$  est généralement biunivoque, ce qui permet de définir  $P$  comme le pôle de  $\pi$  par rapport à  $F^{(r)}$ . Chaque  $S_{r-1}$  de  $S_r$  se représente sur  $F^{(r)}$  avec une variété de Veronese d'indice  $r-1$ ,  $G^{(r-1)}$ ; et on obtient ainsi sur  $F^{(r)}$  un système linéaire  $\infty^r$ ,  $\{G^{(r-1)}\}$ , en correspondance aux différents  $S_{r-1}$  de  $S_r$ . — L'A. démontre que: Si l'on considère un hyperplan  $\pi$  de  $\Sigma$ , non tangent à  $F^{(1)}$ , le lieu des pôles de  $\pi$  par rapport aux variétés du système  $\{G^{(r-1)}\}$  est une nouvelle variété de Veronese d'indice  $r$ ; celle-ci peut être déduite de  $F^{(r)}$  moyennant une homologie, ayant comme centre le pôle  $P$  de  $\pi$  par rapport à  $F^{(r)}$ , comme axe  $\pi$  et comme invariant  $-r$ . Cette proposition se réduit pour  $r = 2$  à un théorème connu de L. Berzolari, étroitement lié à un résultat de S. Lie concernant la surface de Steiner (pour cela cfr., p. ex. E. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, pp. 419 et 430. Messina: Principato 1923).

*Beniamino Segre* (Bologna).

**Roth, L.:** On canonical threefolds. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 31, 508—519 (1935).

Als Anwendung eigener früherer Untersuchungen (dies. *Zbl.* 11, 321 u. 12, 312) betrachtet hier Verf. das kanonische System  $|K|$  einer algebraischen  $V_3$  und die betreffende kanonische Mannigfaltigkeit. Wenn  $V_3$  regulär ist und wenn  $|K|$  einfach irreduzibel und basispunktfrei ist, so hat man  $6P \leq \Omega_1 + 20$ , wo  $P$  das (arithmetische = geometrische) Geschlecht von  $V_3$  und  $\Omega_1$  das Geschlecht der Schnittkurve zweier  $K$  bedeuten. Wenn  $6P = \Omega_1 + 20$  und  $P > 6$  ist, so ist die betreffende kanonische  $V_3$  des Raumes  $S_{P-1}$  die Schnitt- $V_3$  einer  $V_4^{P-4}$ , Ort von  $\infty^1 S_3$  und einer  $V_{P-2}^5$ , die  $P-6$  erzeugende  $S_3$  der ersten  $V_4$  enthält. Die Arbeit gibt eine große Reihe von Beispielen, auch für die Fälle, wo  $|K|$  zusammengesetzt ist und wo die kanonische  $V_3$  sich auf eine mehrfache  $S_3$  reduziert. *E. G. Togliatti* (Genova).



**Enriques, Federigo, e Oscar Chisini:** Sul principio di Plücker-Clebsch. Period. Mat., IV. s. 15, 276—283 (1935).

Les AA. donnent des éclaircissements sur certains passages des leurs Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni [Bologna, Zanichelli, 1, 149—152 (1915)], avec des considérations géométriques qui rattachent le principe de Plücker-Clebsch à la théorie du compte des constantes et de la dimension des variétés algébriques.

*Beniamino Segre* (Bologna).

### **Differentialgeometrie:**

**Wald, Abraham:** Sur la courbure des surfaces. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 918 bis 920 (1935).

Eine Punktmenge eines metrischen Raumes werde linear genannt, wenn sie kongruent einer Teilmenge der euklidischen Geraden ist. Ein metrischer Raum  $D$  besitzt (per definitionem) im Punkte  $p$  eine Flächenkrümmung  $k(p)$ , wenn keine Umgebung des Punktes  $p$  linear ist und es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart gibt, daß jedes Punktequadrupel  $t_0, \dots, t_4$  mit  $t_i p < \delta$  kongruent einem Quadrupel einer Kugel-

fläche  $S_k$  ( $k$  reell) mit dem reellen oder imaginären Radius  $r = \sqrt{\frac{1}{k}}$  und  $|k - k(p)| < \varepsilon$  ist, wo  $S_k$  durch die Länge der (kleineren) Großkreisbögen metrisiert ist. Dann gilt: Damit ein kompakter metrischer Raum einem gewöhnlichen Flächenstück mit stetiger Gaußscher Krümmung kongruent ist (die Metrik der Fläche ist natürlich durch die Entfernungen auf der Fläche zu erklären), ist notwendig und hinreichend, daß er in jedem Punkt eine Flächenkrümmung besitzt. Vgl. die in dies. Zbl. 11, 36 referierte Arbeit desselben Verf.

*H. Busemann* (Kopenhagen).

● **Guichard, Cl.:** Théorie des réseaux. Mém. Sci. math. Fasc. 74, 64 pag. (1935).

Le fascicule contient la théorie des réseaux dans  $E_n$ , du feu géomètre énoncée dans plusieurs Notes, aux C. R. Acad. Sci., Paris et exposée dans son cours de géométrie de 1922—1923 à la Sorbonne. Contenu: Ch. I. Étude des réseaux et congruences et de leurs propriétés projectives. Ch. II. Loi des éléments orthogonaux. Ch. III. Réseaux orthogonaux  $O$ . Ch. IV. Classification des congruences et des réseaux: Réseaux  $O$  et  $pO$ ,  $N$  (nuls) et  $pN$ . Congruences  $I$  (isotropes) et  $pI$ ,  $J$  et  $pJ$  etc.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Vasseur, Marcel:** Invariants tangentiels relatifs au réseau conjugué commun à deux surfaces applicables. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 868—870 (1935).

Durch leichte Rechnung wird bewiesen: 1. Ist  $G$  die tangentielle Gleichung eines konjugierten Netzes  $N$ , so hängt die Summe der Invarianten von  $G$  nur vom Linien-element von  $N$  ab. 2. Sind  $N$  und  $N'$  isometrische konjugierte Netze, so stimmen die Invarianten ihrer tangentiellen Gleichungen dann und nur dann überein, wenn  $N$  und  $N'$  zu einer einparametrischen Biegungsschar mit permanentem konjugiertem Netz gehören.

*Cohn-Vossen* (Moskau).

**Bompiani, Enrico:** Un système de courbes d'une surface invariant par projectivités. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1006—1008 (1935).

L'A. donne d'abord une remarquable interprétation géométrique des formes différentielles introduites par G. Fubini dans la géométrie projective différentielle des surfaces, en utilisant la construction d'invariants projectifs différentiels dont il s'est déjà largement servi auparavant. Après il considère un nouvel invariant différentiel fini, relatif au voisinage du 3<sup>me</sup> ordre d'un point sur une courbe appartenant à une surface assignée. [L'invariant en question et les applications qui s'ensuivent ont aussi été obtenus par moi-même, indépendamment et d'une façon différente, dans une Note (présentée à l'Académie des Lincei) antérieure à celle-ci de quelques jours.] Ceci lui permet de donner une définition géométrique simple des lignes projectives d'une surface [introduites par B. Segre, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 656, 692 (1935), ce Zbl. 12, 85, 86; v. aussi A. Terracini, Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 125 (1935), ce Zbl. 12, 276], et d'envisager soit ces lignes,

soit les lignes pangéodésiques (extrémales de l'arc projectif de Fubini) comme sous-systèmes invariants contenus dans un système de courbe à quatre paramètres, qui est également invariant par projectivités (collinéations et corrélations). Les démonstrations paraîtront dans un autre Recueil. *Beniamino Segre.*

**Terracini, A.: Sulla deformabilità proiettiva delle congruenze rettilinee.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 225—231 (1935).

Soit  $\Gamma$  une congruence (non  $W$ ) déterminée par un système de Wilczynski  $y_u = mz$ ,  $z_v = ny$ ,  $y_{vv} = ay + bz + cy_v + dz_u$ ,  $z_{uu} = \alpha y + \beta z + \gamma y_v + \delta z_u$  où  $y$  et  $z$  sont les coordonnées de deux foyers du rayon et les coefficients  $m, n, a, \dots, \delta$  vérifient certaine condition d'intégrabilité. Une congruence  $\Gamma'(m', n', a', \dots, \delta')$  est projectivement applicable sur  $\Gamma$  s'il existe  $\varrho$  (non constant) qui donne  $m' = \varrho m$ ,  $d' = \varrho d$ ,  $n' = \frac{n}{\varrho}$ ,  $\gamma' = \frac{\gamma}{\varrho}$ . L'auteur montre:  $\Gamma$  est applicable sur  $\Gamma'$  si  $\log \varrho$  est une solution commune de deux équations aux dérivées partielles du 3<sup>me</sup> ordre. Si de plus  $(\log \varrho)_{uv} = 0$ , toutes les congruences de la suite de Laplace  $[\Gamma]$  sont applicables sur les congruences homologues de la suite  $[\Gamma']$ . En appliquant aux congruences dont les focales sont des quadriques, l'auteur montre qu'elles admettent  $\infty^2$  déformations projectives. *S. Finikoff (Moscou).*

**Vincensini, Paul: Sur la courbure des congruences de sphères.** C. R. Acad. Sci., Paris 201, 1004—1005 (1935).

Soit  $C$  une congruence de sphères du rayon  $R$  dont les centres sont situés sur une surface  $S$ . La courbure  $K$  de  $C$  est la courbure de la forme  $\frac{ds^2 - dR^2}{R^2}$  où  $ds$  est l'élément linéaire de  $S$ . L'auteur donne pour  $K$  l'expression:  $K = 1 - \frac{4\varrho^2}{(\Delta\varrho - 2\varrho)^2}$ ,  $\Phi = 1 - \frac{\Phi}{\cos^3 \theta}$  où  $\Phi$  est le premier membre de la deuxième équation de l'applicabilité pour  $S$ ,  $\varrho = \frac{R^2}{2}$  et  $\theta$  — l'angle de la normale de  $S$  avec les rayons de la sphère menés aux points de contact avec son enveloppe. Applications aux congruences  $C$  dont les sphères viennent se placer, en vertu d'une déformation de  $S$ , tangentiellement à une même droite, en particulier, quand  $S$  est une surface de révolution ou une surface de Peterson et  $K$  est une constante (positive, négative ou nulle). *S. Finikoff (Moscou).*

**Tucker, A. W.: Non-Riemannian subspaces.** Ann. of Math., II. s. 36, 965—983 (1935).

Längs einer  $X_n$  soll eine  $L_m$  gegeben werden. Diese soll in Elementfremde  $L_{m_p}$  ( $p, q, r = 0, \dots, w$ ;  $\sum m_p = m$ ) zerlegt werden. Indizes  $\omega, \mu, \lambda$  beziehen sich auf  $X_n$ ,  $a, b, c$  bzw.  $a_p, b_p, c_p$  auf  $L_m$  bzw.  $L_{m_p}$ . Die „gemischten“ Konnexionskoeffizienten von  $L_m$  sollen mit  $\Gamma_{b\mu}^a$  bezeichnet werden und  $A$  soll der Einheitsaffinor sein, so daß z. B.  $A_b^{ap}$  „gemischte“ Bestimmungszahlen von  $A$  in bezug auf  $L_{m_p}$  und  $L_m$  sind. Ausgehend von  $A_a^p A_{bq}^a = \delta_{bq}^{ap}$ , (1)

kann man die  $\Gamma$  folgendermaßen zerlegen

$$\Gamma_{bq\mu}^{ap} = A_{a\ b_q}^{ap} \Gamma_{b\mu}^a + A_{a\ b_q}^{ap} \partial_\mu A_{bq}^a = A_{a\ b_q}^{ap} \Gamma_{b\mu}^a - A_{b_q}^a \partial_\mu A_a^{ap}. \quad (2)$$

Mit Hilfe der  $D$ -Symbolik (vgl. Schouten-Struik, dies. Zbl. 11, 174) läßt sich diese Zerlegung folgendermaßen schreiben

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } A_a^{ap} D_\mu A_{b_p}^a = -A_{b_p}^a D_\mu A_a^{ap} = 0; \\ \text{b) } A_a^{ap} D_\mu A_{b_q}^a = -A_{b_q}^a D_\mu A_a^{ap} = H_{\mu b_q}^{ap} (= \Gamma_{b_q\mu}^{ap}). \quad (p \neq q) \end{array} \right\} \quad (3)$$

Wenn  $R_{\omega\mu\alpha}^b$  der Krümmungsaffinor ist, so läßt sich mit Hilfe von (1) (3) im homogenen Falle sofort schreiben

$$A_{a\ b_q}^{ap} R_{\omega\mu\alpha}^b = R_{p,q\ \omega\mu b_q}^{ap} - 2 \sum_{r \neq p,q} H_{[\omega|c_r]}^{ap} H_{\mu] b_q}^{cr}, \quad (4)$$



wo  $R$  den Krümmungsaffinor von  $L_{m_p}$  darstellt und für  $p \neq q$

$$\frac{1}{2} R_{p,q}^{ap}{}_{\omega\mu b_q} = \partial_{[\mu} H_{\omega] b_q}^{ap} + \Gamma_{c_p[\mu}^{ap} H_{\omega] b_q}^{c_p} - \Gamma_{b_q[\mu}^{c_q} H_{\omega] c_q}^{a_p}$$

ist. Aus (3) b) folgt

$$D_\mu A_{b_q}^a = \sum_{p \neq q} A_{a_p}^a H_{\mu b_q}^{a_p}, \quad D_\mu A_b^{a_p} = - \sum_{p \neq q} A_b^{a_q} H_{\mu a_q}^{a_p}. \quad (5)$$

Mit Hilfe von Oskulationsräumen von  $L_{m_0}$  kann man sich die oben erwähnte Zerlegung so denken, daß

$$H_{\mu b_q}^{a_p} = 0 \quad \text{für} \quad |p - q| > 1.$$

Dann stellen die Gleichungen (3) b) und (4) die Frenetschen bzw. Gauss-Codazzische Gleichungen für  $L_{m_0}$  dar. Diese Theorie wird an einigen Beispielen illustriert (metrische Räume usw.). — Die analytischen Ausführungen des Verf. gelten nur für den holonomen Fall. Mit Hilfe des Anholonomitätsobjektes lassen sie sich aber sofort für den nichtholonomen Fall verallgemeinern, wie auch der Verf. in einem — an die Redaktion des Zbl. gerichteten — Briefe richtig bemerkte. (Die konsequente Anwendung der  $D$ -Symbolik gestattet schon die Zerlegung von  $R_{\omega\mu a}^b$ , aus welcher verschiedene interessante Sätze über Oskulationsräume abgeleitet werden können. Ref.) *Hlavatý*.

**Levine, Jack:** Some theorems on tensor differential invariants. Bull. Amer. Math. Soc. **41**, 679—682 (1935).

Der Verf. verallgemeinert den bekannten Satz aus der algebraischen Invariantentheorie: Wenn ein Quotient von zwei relativ primen Polynomen absolute Invariante ist, so sind der Zähler sowie auch der Nenner relative Invarianten. Die Verallgemeinerung kann folgendermaßen formuliert werden: Wenn die Funktionen

$$T_{a \dots b}^{i \dots j} \left( g_{kl}, \dots, \frac{\partial^p g_{kl}}{\partial x^m \dots \partial x^r} \right)$$

gewisse — vom Verf. angegebene — funktionelle Bedingungen erfüllen und sich nach

$$T_{a \dots b}^{i \dots j} (\bar{g}_{kl}, \dots) \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^a} \dots \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^b} = \Phi T_{a \dots b}^{i \dots j} (g_{kl}, \dots) \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^i} \dots \frac{\partial x^b}{\partial \bar{x}^j}$$

transformieren, wo  $\Phi \equiv \Phi \left( \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right)$  die ersten Ableitungen nach  $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$  hat, so bilden sie eine „invariante“ Affinordichte (d. i.  $\Phi$  ist eine Potenz der Determinante von  $\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}$ ). Die Beweisführung beruht teilweise auf den Resultaten von T. Y. Thomas-A. D. Michal [Ann. of Math. **28**, 631—688 (1927)], insbesondere auf dem Satze (17. 1) dieser Arbeit.

*Hlavatý* (Praha).

**Cartan, Élie:** Le calcul tensoriel projectif. Rec. math. Moscou **42**, 131—147 (1935).

Diese Mitteilung ist eine Ausarbeitung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **9**, 130) desselben Verf. Zur Definition der Größen wird die projektive infinitesimale Koordinatentransformation im laufenden Punkte  $P$  des Raumes benutzt:

$$\delta x^i + e_k^i x^k - x^i x^k e_k^0 = 0 \quad (i, j, k = 1, \dots, n; \lambda = 0, n). \quad (1)$$

Ein System von Zahlen, die sich in bezug auf (1) linear transformieren, und zwar mit den Koeffizienten, die von diesen Zahlen nicht abhängen, heißt ein Tensor (in  $P$ ). Beispiel:  $X_\lambda^i$  mit dem Transformationsgesetz

$$\delta X_0^i = -e_k^i X_0^k, \quad \delta X_\lambda^i = +e_\lambda^i X_\lambda^i - e_k^i X_\lambda^k + \delta_\lambda^j e_k^0 X_0^k \quad \left( \delta_\lambda^j = \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ für } \begin{matrix} i \neq j \\ i = j \end{matrix} \right) \quad (2)$$

ist ein Tensor. (Die üblichen algebraischen Operationen mit Tensoren [im gewöhnlichen Sinne] lassen sich auf die jetzt definierten Größen teilweise auch übertragen.) — Zur Konstruktion der Konnexion wird die projektive infinitesimale Punkttransformation in  $P$

$$dx^i + \omega^i + \omega_k^i x^k - x^i x^k \omega_k^0 = 0 \quad (3)$$

benutzt. Das kovariante Differential  $DG$  einer Größe  $G$  ist gleich der Variation der Bestimmungszahlen von  $G$  im benachbarten Punkte  $P'$ , und zwar in bezug auf das

Koordinatensystem, welches aus dem Koordinatensystem in  $P$  mittels (3) hervorgeht (Cartansche Abbildung benachbarter Räume. Ref.). (Vgl. auch Schouten-van Kampen, dies. Zbl. 8, 179.) Somit ist z. B.:

$$DX_0^i = dX_0^i + \omega_k^i X_0^k, \quad DX_i^j = dX_i^j - \omega_k^j X_i^k + \omega_k^j X_i^k - \delta_j^i \omega_k^0 X_0^k. \quad (4)$$

Der Vergleich von (1) und (3) lehrt, daß  $DX_i^i = 0$ , wenn (3) den Ursprung invariant läßt  $[\omega^i = 0, \omega_k^i = c_{ki}^i, d = \delta]$ . Setzt man  $\omega^j G_{ij} = DG$ , so ist  $G_{ij}$  die kovariante Ableitung von  $G$ . Die Bestimmungszahlen von  $G$  und  $G_{ij}$  bilden einen Tensor, die Bestimmungszahlen von  $G_{ij}$  allein dagegen nicht. [Setzt man definitorisch  $G_{i0} \equiv G$ , so ist  $G_{ij}$  ein Tensor. Ref.] — Diese Theorie wird dann auf Räume mit projektiver Konnexion angewandt, und zwar wird der Krümmungstensor (der hier auch den Torsionstensor liefert) samt der üblichen Padova-Bianchischen Identität abgeleitet und die „normalen“ Koordinaten eingeführt. — Der Hauptwert dieser Arbeit liegt nach der Meinung des Ref. darin, daß diese Methode gleichzeitig auf beliebige Konnexion (z. B. konforme) angewandt werden kann. (In solchem Falle müßten die Transformationen (1) und (3) durch andere ersetzt werden.) — Druckfehlerberichtigungen: Im Nenner der Formel (16) (S. 139) soll  $\bar{x}^k \omega_k^0$  stehen, in der ersten Formel von (21) (S. 141) soll  $+ X_0^k \omega_k^i$  gesetzt werden.

*Hlavatý (Praha).*

**Thomas, T. Y.:** Algebraic characterizations in complex differential geometry. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 501—514 (1935).

Die Bedingung dafür, daß eine symmetrische affine Übertragung  $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$  eine metrische Darstellung besitzt, d. h. daß es einen von Null verschiedenen Tensor  $g_{\alpha\beta}$  mit  $\partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\sigma\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma + g_{\alpha\sigma} \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma$  gibt, wird durch ein System von algebraischen Relationen  $R(B) = 0$  für die Komponenten des Krümmungstensors  $B_{\beta\gamma\delta}^\alpha$  und ihren kovar. Ableitungen  $B_{\beta\gamma\delta,\epsilon}^\alpha, \dots$  gegeben. Der Rang der Matrix  $(g_{\alpha\beta})$  heißt die Dimension der metr. Darst. Die in den  $R$  vorkommenden Komponenten  $B_{\beta\gamma\delta}^\alpha, \dots$  werden als Koordinaten eines Punktes  $B$  in einem Raum  $E$  aufgefaßt. In diesem Raum werden  $n$  irreduzible Mannigfaltigkeiten  $M_1, \dots, M_n$  durch rationale Parameterdarstellungen definiert mit folgenden Eigenschaften: 1. Wenn eine Übertragung  $\Gamma$  eine  $r$ -dimensionale metrische Darstellung gestattet, so gehört der Punkt  $B$  zu  $M_r$ , und  $M_r$  ist die kleinste algebr. Mannigf. mit dieser Eigenschaft. 2. Wenn  $B$  zu  $M_r$  gehört, gestattet  $\Gamma$  eine metrische Darstellung von einer Dimension  $s \leq r$ , aber nicht notwendig von der Dimension  $r$ . Die Gesamtheit aller Übertragungen, die eine metr. Darst. von der Dim.  $r$  gestatten, läßt sich somit für  $r > 1$  nicht durch algebr. Gleichungen charakterisieren.

*van der Waerden (Leipzig).*

### **Topologie:**

**Brödel, Walter:** Über die Deformationsklassen zweidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 87, 85—120 (1935).

Im ersten Teil der Arbeit werden die Deformationsklassen schlichter ebener Bereiche von endlichem Zusammenhang untersucht. Eine topologische Selbstabbildung einer Kreisscheibe mit höchstens zwei Löchern ist dann und nur dann in die Identität deformierbar (es handelt sich immer um topologische Deformationen), wenn die Orientierung erhalten bleibt und die Ränder einzeln in sich übergehen. Hat die Kreisscheibe dagegen  $l \geq 3$  Löcher, so ist eine topologische Selbstabbildung nur dann in die Identität deformierbar, wenn sie die Orientierung erhält und die Querschnitte einer  $(l-1)$ -gliedrigen Kette in homotope überführt. Dabei wird unter einer Querschnittkette eine Folge einander nicht treffender Querschnitte verstanden, die die Lochränder in bestimmter Reihenfolge miteinander verbinden. Auf diesen Sätzen beruht die Klassifizierung der Selbstabbildungen der geschlossenen orientierbaren Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht  $p > 0$ . Diese Deformationsklassen werden durch das Verhalten einer Kette von  $2p$  Rückkehrschnitten charakterisiert, d. i. eine geordnete Folge von Rückkehrschnitten, von denen je zwei aufeinanderfolgende sich in genau einem Punkte schneiden, während darüber hinaus keine Schnittpunkte vorhanden



sind. Die Abbildung ist dann und nur dann in die Identität deformierbar, wenn die Rückkehrschnitte einer solchen  $2p$ -gliedrigen Kette jeweils in homotope übergehen. Analoge Sätze gelten für die berandeten orientierbaren Mannigfaltigkeiten. Schließlich werden die nichtorientierbaren Flächen endlichen Geschlechts untersucht. Wir erwähnen nur den folgenden Satz: Eine topologische Abbildung einer geschlossenen nichtorientierbaren Mannigfaltigkeit vom Geschlecht  $k$  auf sich gehört dann und nur dann zur Klasse der Identität, wenn  $k + 1$  Rückkehrschnitte in homotope abgebildet werden. Diese Rückkehrschnitte sind so auszuwählen, daß die ersten  $k$  die Mannigfaltigkeit als getrennte einufrige Rückkehrschnitte schlichtartig machen und von dem letzten in je einem Punkte geschnitten werden. Bei den Beweisen wird zur Vermeidung mengentheoretischer Schwierigkeiten vielfach von konformen Abbildungen Gebrauch gemacht.

Seifert (Heidelberg).

**Kaufmann, B.:** The dissection of closed sets of arbitrary dimension and the generalized Brouwer-Alexandroff theorem. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 525—535 (1935).

Eine weitgehende Verallgemeinerung, Verschärfung und Vereinfachung der früheren Resultate des Verf. auf dem Gebiete der „lokalen Dimensionstheorie“ (in der vom Verf. begründeten Richtung). — Der Begriff des Mannigfaltigkeitspunktes bzw. des konzentrischen Mannigfaltigkeitspunktes (der vom Verf. in mehreren früheren Arbeiten untersucht wurde) wird jetzt insofern wesentlich verschärft, als seiner Definition jetzt die  $n$ -dimensionalen Kernmengen im Sinne des Ref. und nicht wie früher die Cantorsche Mannigfaltigkeiten schlechtweg zugrunde gelegt werden. Dementsprechend bekommen auch die früheren Hauptsätze des Verf. die folgende verschärfte Form: Jeder Schnitt einer  $r$ -dimensionalen Kernmenge ( $r \geq 1$ ) enthält einen konzentrischen Mannigfaltigkeitspunkt; die Menge aller  $r$ -dimensionalen Mannigfaltigkeitspunkte eines  $r$ -dimensionalen Kompakts ist mindestens eindimensional. Ein früherer Phragmén-Brouwer'scher Satz, den Verf. gemeinsam mit Ursell als Lokalisierung des entsprechenden Satzes des Ref. bewiesen hat [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **20**, 662—666 (1934); dies. Zbl. **10**, 377], wird jetzt für beliebige  $r$ -dimensionale Kompakta des  $R^n$  und nicht nur für  $r = n - 1$  bewiesen. Im Zusammenhang mit den lokalen Phragmén-Brouwer'schen Sätzen steht auch der neue Begriff eines Rißpunktes, dessen Existenz auf jedem  $(r-1)$ -dimensionalen Schnitt einer  $r$ -dimensionalen Kernmenge nachgewiesen wird. Ob die neugewonnenen Verschärfungen der lokal-dimensionstheoretischen Sätze endgültig sind (d. h. ob sie sich nicht wesentlich weiter verschärfen lassen), darüber gibt die Arbeit keine Auskunft. Insbesondere bleibt die Frage nach der Existenz einer  $r$ -dimensionalen Kernmenge ( $r > 1$ ) mit einer nur eindimensionalen Menge von Mannigfaltigkeitspunkten offen.

P. Alexandroff (Moskau).

## Astronomie und Astrophysik.

**Krug, W.:** Mehrfache Lösungen im Oppositionsbereich bei der parabolischen Bahnbestimmung. (Diskussion eines künstlichen Beispiels.) Astron. Nachr. **257**, 153—164 (1935).

Die Bedingungen für das Auftreten mehrfacher Lösungen bei Benutzung der Olbersschen Bahnbestimmungsmethode werden aufgestellt und an einem künstlichen Beispiel nachgeprüft.

Klose (Berlin).

**Belorizky, D.:** Accélération séculaire de la lune. Bull. Astron., II. s. **9**, 149—167 (1934).

Bericht über die Geschichte und den gegenwärtigen Stand des Problems der sekulären Akzeleration des Mondes, eines Problems, das nicht nur für die Vorausberechnung von Finsternissen, sondern auch für die gesamte ältere Chronologie von größter Bedeutung ist. In der Bibliographie wäre noch auf Schoch, Astron. Abh. **8**, Nr 2, sowie auf P. V. Neugebauer, Astron. Nachr. **244**, 305, hinzuweisen gewesen.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

**Happel, Hans:** Über eine neue Art zur Berechnung der Mondstörungen. Festschr. Techn. Hochsch. Breslau 1910—1935, 211—230 (1935).

Die Störungsfunktion wird in üblicher Weise in eine Fourierreihe entwickelt, die Fourierkoeffizienten aber als Funktionen der Poincaréschen Variablen dargestellt. Eine eingehende Untersuchung der Größenordnung führt zur Auswahl derjenigen Terme, die bei der Integration Störungen oberhalb einer vorgegebenen Schranke hervorrufen. In den Störungen der Polarkoordinaten sind außer den Säkulartermen die Variation und Evektion berechnet. *Klose (Berlin).*

**Pannekoek, A.:** Limb darkening. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 733—734 (1935).

The paper is a sequel to one previously published (see this Zbl. 11, 421), where it was pointed out that the variations of the absorption coefficients with wave-length and temperature cause the colour temperatures to deviate from the effective temperatures. In the present paper it is shown that this circumstance has also an important influence on the coefficient of limb darkening. A numerical table has been computed, showing the variation of limb darkening with wave-length and temperature; a qualitative discussion of the problem is also given. The results may be of importance for eclipsing variables, and the author points out that photoelectric observations of appropriate eclipsing variables would afford an interesting test of his theory.

*Steensholt (Bergen).*

**Sayer, Arthur R.:** The early spectrum of Nova Aquilae 1918. Circ. Harvard Coll. Observ. Nr 406, 1—22 (1935).

The paper gives a report on results of measurements of the hydrogen contours of the early stages of development of Nova Aquilae 1918. Numerous diagrams are given in illustration of the results. The existence of structural variations is established, and a new type of contour is measured; the author further indicates that the theory of the formation of the absorption lines may possibly need revision. The paper supports the hypothesis that the ejection of nebulous matter was asymmetrical. Among the other results we mention that the absorption lines of hydrogen are found to be formed in the outer parts of the nebular shell, and that the velocity dispersion there is small. A study of the intensity distribution shows no serious break in intensity at the limit of the Balmer series. This fact indicates that the density of the nova shell is higher than that of planetary nebulae in which a discontinuity of this kind occurs. — For further details the reader must be referred to the original paper. *Steensholt (Bergen).*

**Brill, Alfred:** Über die Lösung der Integralgleichung der Stellarstatistik. Astron. Nachr. 257, 253—264 (1935).

Die in einer früheren Arbeit (Z. Astrophys. 8, 271—280; vgl. dies. Zbl. 9, 237) vom Verf. entwickelte Methode, die Integralgleichung der Stellarstatistik rein numerisch zu lösen, wird durch eine ausführliche formelmäßige Darstellung (und zwar in Summen-, nicht in Integralform) erläutert. Das vorgeschlagene Verfahren ist im wesentlichen gekennzeichnet durch die Einführung der mittleren Leuchtkraft der Sterne einer bestimmten scheinbaren Helligkeit. Diese (von der Dichte- und Leuchtkraftverteilung abhängige) Größe wird als „isoplene absolute Helligkeit“ definiert und läßt sich für die einfachsten Dichtegesetze explizit angeben, während sie im allgemeinen durch schrittweise Näherung zu erhalten ist. *Wempe (Göttingen).*

## Relativitätstheorie.

● **Lanchester, F. W.:** Relativity. An elementary explanation of the space-time relations as established by Minkowski, and a discussion of gravitational theory based thereon; illustrated by 72 diagrams. London: Constable & Co., Ltd. 1935. XIV, 222 pag bound 12/-.

Verf. hat die Relativitätstheorie ganz mißverstanden. Er glaubt die Ideen von Minkowski wiederzugeben, entwickelt aber seine eigene Theorie. Über den Charakter dieser Theorie kann das folgende Beispiel eine Vorstellung geben: Verf. definiert den relativistischen Impuls  $p$  und die Energie  $W$  eines Massenteilchens als  $p = mu$  bzw.  $W = \frac{1}{2} mu^2$ , wo  $m$  eine konstante Größe (Ruhmasse?) ist und  $u$  mit der gewöhnlichen Geschwindigkeit  $v$  durch die



Gleichung  $v = c \operatorname{th}(u/c)$  zusammenhängt. (Verf. nennt  $u$  „kosmische Geschwindigkeit“.) Der logische Widerspruch dieses Ansatzes für  $p$  und  $W$  mit der Lorentztransformation (deren Gültigkeit Verf. nicht bestreitet) wird vom Verf. nicht bemerkt. Die Betrachtungen des Verf. über die Gravitation sind ebenso widerspruchsvoll (vgl. insbesondere S. 108). *V. Fock.*

**Requard, Fritz: Einsteineffekte und Weltmetrik. Ein Beitrag zur Frage der experimentellen Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie.** Mitt. techn. Inst. Tung-chi-Univ. Woosung 2, H. 3, 1—13 (1935).

**Requard, Fritz: Äquivalenzprinzip und klassische Metrik. Über einen neuen Aufbau der deterministischen Makrophysik mit Hilfe des Äquivalenzprinzips im Rahmen der klassischen Metrik.** Mitt. techn. Inst. Tung-Chi-Univ. Woosung 2, H. 4, 1—14 (1935).

Die beiden Arbeiten versuchen die Äquivalenz von schwerer und träger Masse in adäquater Weise in die klassische Mechanik einzubauen und auch die bisher nur von der Relativitätstheorie aus behandelten Einsteineffekte neu zu deuten. Leider sind sie zu allgemein gehalten, als daß dem Ref. ein genaues Verständnis möglich gewesen wäre.

*Heckmann* (Göttingen).

**Narlikar, V. V.: On the world-trajectories in Milne's theory.** Philos. Mag., VII. s. 20, 1062—1067 (1935).

Umformungen der sechs Integrale von Milnes Bewegungsgleichungen für „nicht-fundamentale“ Partikel und Versuch, sie anschaulicher zu deuten. *Heckmann.*

**Narliker, V. V., and D. N. Moghe: A note on an isotropic solution in relativity.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 95, 735—737 (1935).

Es wird eine kugelsymmetrische und zeitabhängige Lösung der Feldgleichungen angegeben, welche der von Walker (vgl. dies. Zbl. 12, 134) formulierten korrekten Isotropiebedingung genügt.

*Heckmann* (Göttingen).

**McVittie, G. C.: Gravitation in cosmological theory.** Z. Astrophys. 10, 382—390 (1935).

In zwei vorhergehenden Arbeiten (vgl. dies. Zbl. 11, 137 und 12, 232) hat der Verf. das kosmologische Problem behandelt, indem er den unmetrischen Begriff des Fernparallelismus zum Ausgangspunkt nahm und das Äquivalenzprinzip sowie die Feldgleichungen der Allgem. Rel.-Theorie aufgab. Er zeigt in der vorliegenden Arbeit, wie er trotzdem seine Betrachtungen dahin ergänzen kann, daß auch „echte“ Gravitationsphänomene erfaßt werden können.

*Heckmann* (Göttingen).

## Quantentheorie.

● **Fues, E.: Einführung in die Quantenmechanik.** Leipzig: Akad. Verlagsges. m. b. H. 1935. VII, 224 S. u. 54 Fig. RM. 14.—.

Es handelt sich um ein Lehrbuch, welches in übersichtlicher Weise die Hauptzüge der Quantenmechanik vom Standpunkt der Wellentheorie aus entwickelt. Nach einem einleitenden Kapitel über den allgemeinen physikalischen Inhalt der Theorie wird die Quantenmechanik des Einkörperproblems und der Systeme gebracht. Dann folgen Kapitel über die wichtigsten Begriffsbildungen der Theorie (Observable, Eigenwerte usw.), wo besonders die eigenartige Behandlung der Impulsmomentsätze zu bemerken ist, über Diracs Elektronentheorie, über die korrespondenzmäßige Verwertung der Elektrodynamik und schließlich über die Theorie der Beugungsversuche mit Materiewellen. Die allgemeinen Sätze werden überall durch einfache Beispiele erläutert.

*O. Klein* (Stockholm).

**Schuchowitzky, A.: Über eine neue Methode der Lösung von Variationsaufgaben der Quantenmechanik.** C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 161—164 (1935).

Es wird gezeigt, wie man die praktische Berechnung der Energie von Atomsystemen nach dem Ritzschen Verfahren etwas vereinfachen kann, indem man bei den einzelnen Schritten nicht von dem gegebenen Energieoperator ausgeht, sondern von gewissen Approximationen desselben.

*W. Feller* (Stockholm).

**Wessel, W.: Diracsche Spintheorie und nichtlineare Feldgleichungen.** (11. Deutsch. Physik.-Tag., Stuttgart, Sitzg. v. 22.—28. IX. 1935.) *Physik. Z.* **36**, 878—880 (1935).

Ein Versuch, gewisse nichtlineare elektromagnetische Feldgleichungen, die eine gewisse Ähnlichkeit mit den Bornschen haben, aus einer spekulativen Betrachtung betreffs der Diracgleichung zu gewinnen.

*P. Jordan (Rostock).*

**Scherzer, O.: Zur Neutrinotheorie des Lichts.** *Z. Physik* **97**, 725—739 (1935).

Im Sinne der vom Ref. ausgeführten Theorie drückt Verf. das elektromagnetische Feld bilinear durch das Neutrino-feld aus; mit diesem Ansatz in die Hamiltonfunktion der Wechselwirkung von Licht und elektrischen Ladungen eingehend beweist er, daß tatsächlich in der zu fordernden Weise die von der gewöhnlichen Lichttheorie angegebenen Effekte herauskommen.

*P. Jordan (Rostock).*

**Darwin, C. G.: Notes on magneto-optics.** *Proc. Roy. Soc. London A* **151**, 512 bis 539 (1935).

Es wird zunächst eine vollständige phänomenologische Theorie der Magneto-optik entwickelt mit Hilfe eines komplexen dielektrischen Tensors (mit Einschluß der magnetischen Gyration). Es wird dann versucht, diesen Tensor aus modellmäßigen Vorstellungen unter besonderer Berücksichtigung der Lorentz-Lorenz-Korrektion zu berechnen, so z. B. für ein idealisiertes Metall und für isolierte Atome. Für den letzteren Fall ergibt sich eine Prüfung durch Vergleich des magnetischen Drehvermögens in flüssigem und gasförmigem Stickstoff. Es wird dann weiter insbesondere der Kerr-Effekt bei Ferromagneten (bei diesen ist natürlich nicht das Feld, sondern die Magnetisierung die maßgebende Größe) untersucht und eine Relation zwischen den Komponenten des dielektrischen Tensors gefunden, die weitgehend unabhängig von speziellen Modellvorstellungen sein sollte. Eine Prüfung an dem ziemlich unsicheren experimentellen Material ergibt, daß der Effekt formal dargestellt werden kann als hervorgerufen durch ein inneres magnetisches Feld von gleicher Größenordnung, aber entgegengesetztem Vorzeichen als das Weißsche innere Feld.

*Nordheim (Lafayette).*

**Wataghin, G.: Sull'interazione dei protoni e dei neutroni.** *Ric. Sci. progr. tecn. econom. naz.* **2**, 263—265 (1935).

**Milianczuk, B.: Über die magnetische Dipolstrahlung.** *Bull. int. Acad. Polon. Sci. A* **1935**, 430—437.

Berechnung der Intensität von magnetischen Dipollinien, Auswahlregeln, Zeeman-Effekt, mit der Diracschen Theorie des Einelektronenproblems bei zentralsymmetrischem Feld. Vergleich mit den Intensitäten der elektrischen Quadrupollinien, Anwendung auf die Wasserstofflinien (Übergänge von  $3^2D_{3/2}$  aus) und die Linie  $5d^9 6s^2 2D_{3/2}^1$  —  $5d^9 6s^2 2D_{5/2}^1$  des Hg II-Spektrums.

*Bechert (Gießen).*

**Milianczuk, B.: Über die Dispersion des Lichtes in der Umgebung der magnetischen Dipollinien.** *Bull. int. Acad. Polon. Sci. A* **1935**, 438—444.

Die Heisenberg-Kramerssche Dispersionsformel wird auf den Fall des Zusammenwirkens von elektrischer Dipolstrahlung, elektrischer Quadrupol- und magnetischer Dipolstrahlung erweitert. Der Brechungsindex zeigt in der Nähe einer Linie für alle hier angeführten Arten von Strahlung dasselbe Verhalten in Abhängigkeit von der Frequenz.

*Bechert (Gießen).*

**Basu, K.: Infra-red spectra of H<sub>2</sub>O-molecule and the Raman effect.** *Indian Phys. Math. J.* **6**, 55—64 (1935).

Auf Grund eines elektrostatischen Dreieckmodells wird versucht, einige Linien des Rotations-schwingungsspektrums von H<sub>2</sub>O zu berechnen.

*L. Tisza (Charkow).*

**Wannier, G.: Die Beweglichkeit des Wasserstoff- und Hydroxylions in wäßriger Lösung.** *Ann. Physik, V. F.* **24**, 545—568 u. 569—590 (1935).

Der besondere Beweglichkeitsmechanismus des Wasserstoff- und Hydroxylions in wässriger Lösung beruht nach E. Hückel auf Übergängen von Protonen zwischen Ion und den es umgebenden Wassermolekülen. Im elektrischen Feld erfahren die Ionen eine Richtwirkung, welche eine Vorzugsrichtung für die Protonenübergänge und damit einen Strom von Protonen hervorruft, der zu dem Ladungstransport der als Ganzes bewegten Ionen (H<sub>3</sub>O<sup>+</sup> bzw. OH<sup>-</sup>)



hinzukommt. Maßgebend für den Zusatzstrom der Protonen ist bei gegebenem Feld einerseits die „Relaxationszeit“ der Drehbewegung der Ionen, andererseits die Häufigkeit der Protonenübergänge, d. h. die mittlere Lebensdauer der Ionen. — Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, daß diese Vorstellung zu einer bereits von E. Hückel [Z. Elektrochem. **34**, 546 (1928)] angegebenen Formel für die zusätzliche Protonenleitfähigkeit führt, welche aber noch die unbekannte mittlere Lebensdauer des Ions enthält. Im zweiten Teil wird der Versuch gemacht, diese Lebensdauer auf Grund wellenmechanischer Ansätze zu berechnen. Dabei wird weniger Wert auf die Berechnung ihres Absolutwertes, als auf deren Temperaturabhängigkeit gelegt. Die Übergänge der Protonen kommen durch den „Tunneleffekt“ zustande. Ihre Häufigkeit wird unter Zugrundelegung eines einfachen schematischen Ansatzes für das Potential des Protons berechnet. Hierfür sind maßgebend Integrale der Form:

$$\int_{-1}^{+1} e^{\vartheta^2} P_n(x) P_m(x) dx,$$

deren Verhalten eingehender untersucht wird. Die gefundene Temperaturabhängigkeit steht in guter Übereinstimmung mit der beobachteten Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit, im Gegensatz zu dem früher von Hückel unternommenen Versuch ihrer Berechnung, der noch auf klassischen Vorstellungen für den Übergangsmechanismus fußte. Für die errechneten Modellparameter erhält man allerdings wenig befriedigende Werte. Die Abhängigkeit von der Masse indessen (Beweglichkeit des Deutons!) wird von der Theorie richtig wiedergegeben.

E. Hückel (Stuttgart).

**Margenau, Henry:** Theory of pressure effects of foreign gases on spectral lines. Physic. Rev., II. s. **48**, 755—765 (1935).

Es wird theoretisch der Einfluß von hohem Fremdgasdruck auf die Form und die Lage von Spektrallinien untersucht, unter Zugrundelage eines Wechselwirkungsgesetzes, nach welchem die Terme des strahlenden Atoms durch ein in der Distanz  $r$  befindliches Störatom um  $\Delta\nu = -\alpha/r^6$  verschoben werden. Verf. analysiert die bisher existierenden Theorien der Druckverbreiterung und Druckverschiebung von einem rationalen Standpunkt aus und legt ihre Gültigkeitsgrenzen fest. Es ergibt sich ein angenehmer Ausdruck für die Linienform, der für Drucke  $\sim 20$  Atm. gültig ist, und ein Ausdruck, der dieselbe nach einer graphischen Integration auch für niedrigere Drucke wiedergibt. Die Linienbreite und die Verschiebung sind für niedrigere Drucke proportional zum Druck, für höhere prop. zum Quadrat desselben. V. Weisskopf.

**Weisskopf, V.:** Über die Polarisation der Elektronen bei der Streuung an Kristallen. Z. Physik **93**, 561—581 (1935).

The paper deals in its first part with the question whether a beam of electrons will show any polarization according to Dirac's theory if the beam is reflected by an otherwise arbitrary one-dimension potential barrier. This question is answered in the affirmative; since then it has been shown in a paper by Hellmann to which the author of the note here discussed has given his assent, that no polarization effect can ever occur if the potential barrier depends on one coordinate only. In the second part of the paper the reflection of electrons from crystal surfaces is discussed. It is shown that the reflected beam is unpolarized if the condition of reflection is satisfied for one lattice plane only but that polarization may occur if the Bragg relation holds true for several lattice planes at the same time. (The polarization thus obtained is at best of the order of magnitude of a few percent only; to detect this polarization a second reflection from the surface of an "analyzer" has to be carried out which of course will reduce the order of magnitude of the effect.) O. Halpern.

**Williams, E. J.:** Correlation of certain collision problems with radiation theory. Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. **13**, Nr 4, 1—50 (1935).

Die Arbeit enthält eine ausführliche Darstellung der von demselben Verf. früher entwickelten Methode [vgl. Physic. Rev. **45**, 729 (1934)] zur quantentheoretischen Behandlung von Stoßproblemen durch Fourierzerlegung des elektrischen Felds des stoßenden Teilchens und nachherige Behandlung als Strahlungsfeld. Die Fruchtbarkeit der Methode wird an einer Reihe von Beispielen dargelegt (Ionisierung von Atomen, Kernspaltung durch Elektronen hoher Geschwindigkeit, Strahlung bei Stößen, Paarbildung durch ein Photon im Kernfeld und durch Stoß zweier Teilchen, Spaltung eines Photons im Feld eines elektrischen Teilchens).

O. Klein (Stockholm).

**Nishina, Y., S. Tomonaga and M. Kobayasi:** On the creation of positive and negative electrons by heavy charged particles. *Sci. Pap. Inst. Physic. Chem. Res.* **27**, 137—178 (1935).

Es wird der Wirkungsquerschnitt für die Bildung von Paaren von positiven und negativen Elektronen beim Zusammenstoß von schweren Kernen großer Geschwindigkeit in Anlehnung an Weizsäcker [*Z. Physik* **88**, 612 (1934); dies. Zbl. **9**, 92] und Williams (vgl. vorst. Ref.) berechnet. Bei nackten Kernen ergibt sich eine Proportionalität mit der dritten Potenz des Logarithmus der Geschwindigkeit, während für ungeladene Atome für die entsprechende Potenz der Wert 2 erhalten wird.

*O. Klein* (Stockholm).

## Klassische Theorie der Elektrizität.

**Sommerfeld, A.:** Über die Dimensionen der elektromagnetischen Größen. *Physik. Z.* **36**, 814—820 (1935).

Die elektromagnetischen Größen sollten nicht in den 3 Einheiten des CGS-Systems geschrieben werden, sondern in 4 Einheiten, wobei als vierte Einheit die Ladung empfohlen wird (aus praktischen Gründen statt ihrer der Widerstand). Spezielle Ausführungen über Dimension und Definition der Polstärke eines Stabmagneten.

*Autoreferat.*

**Fischer, Johannes:** Zur Schreibweise der elektromagnetischen Gleichungen. *Physik. Z.* **36**, 914—916 (1935).

**Lewis, T.:** *Electromagnetic field theory.* *Philos. Mag.*, VII. s. **20**, 1000—1025 (1935).

Versuch, eine neue, klassische, einheitliche elektromagnetische Feldtheorie aufzubauen, mit linearen Differentialgleichungen. Die Materieteilchen sollen Gebieten entsprechen, wo  $\mathfrak{E} = 0$ ,  $\mathfrak{H} = 0$ ;  $\mathfrak{E}$  senkrecht auf der Oberfläche der Teilchen,  $\mathfrak{H}$  parallel dazu. Im Grenzfall kleiner Wechselwirkung zwischen den Teilchen kommen die klassischen Bewegungsgesetze heraus.

*Bechert* (Gießen).

**Braude, S.:** The motion of the electron in electric and magnetic field with space-charge. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **5**, 621—626 (1935) [Russisch].

Die Potential- und Dichteverteilung in Elektronenröhren weicht bei vorhandenem Magnetfeld wesentlich von dem Verlauf ohne Magnetfeld ab. Verf. behandelt (nach der klassischen Mechanik) die Bewegung eines Elektrons im Plattenkondensator unter der Einwirkung des von der Raumladung herrührenden elektrischen Feldes und eines den Platten parallelen Magnetfeldes  $H$ . Es wird die Bahn des Elektrons und der Verlauf des Potentials bestimmt. Im Spezialfall  $H = 0$  bekommt man für die Abhängigkeit der Stromstärke von der Anodenspannung die Formel von Langmuir.

*V. Fock* (Leningrad).

**Graffi, Dario:** Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. I. *Ist. Lombardo, Rend.*, II. s. **68**, 541—558 (1935).

Es wird gezeigt, daß die Debyesche Dipoltheorie auf die Gleichung führt:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + \int_0^t k(t - \tau) \mathfrak{E} d\tau,$$

wo  $\mathfrak{D}$  = elektrische Erregung,  $\mathfrak{E}$  = elektrische Feldstärke,  $k$  eine Funktion des Parameters  $t - \tau$ , die nur vom betrachteten Medium abhängt. *Bechert* (Gießen).

**Bontempi, Luis A.:** Die Sätze von Kirchhoff und die Wheatstonesche Brücke. Ableitung der Beziehungen, die das Gleichgewicht in einem Leiternetz bestimmen. *An. Soc. Ci. Argent.* **119**, 77—96 (1935) [Spanisch].

**Stefanescu, Sabba S.:** Lignes de champ magnétique autour d'une ramification de courants. *Bull. Math. Phys. École polytechn. Bucarest* **5**, 123—127 (1935).

Verf. berechnet das magnetische Feld von stromführenden Drähten, welche radial von einem einzigen Punkte ausgehen. Die Berechnung ist elementar. *Strutt*.



**Mercier, Jean:** Contribution à l'étude de la synchronisation des oscillateurs. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 949—951 (1935).

Ausgehend von den bekannten zwei simultanen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die elektrischen Ströme in zwei gekoppelten Schwingungskreisen erhält Verf. die bekannte Gleichung vierter Ordnung für die Eigenfrequenzen, welche er in zwei Gleichungen aufspaltet, deren eine vierter Ordnung ist und die andere zweiter Ordnung. Auf Grund dieser Gleichungen gelingt es, das Verhalten der Kreise bei normalem Funktionieren zu diskutieren, sodann allgemein die Dämpfungen zu berechnen, darauf Relationen zwischen den Stromamplituden abzuleiten. *Strutt.*

**Niessen, K. F.:** Erweiterung einer früheren Formel für die Erdabsorption in der drahtlosen Telegraphie. Ann. Physik, V. F. **24**, 31—48 (1935).

The work of a previous paper (this Zbl. **11**, 90) is extended to the case when conduction and displacement currents in the earth are of the same order of magnitude; similar mathematical technique is used to find an expression for the proportion of energy absorbed in the earth. Practical numerical examples and curves for various cases are given.

*M. Slow-Taylor* (Slough).

**Goubau, Georg:** Dispersion in einem Elektronen-Ionen-Gemisch, das unter dem Einfluß eines äußeren Magnetfeldes steht. (Beitrag zur Dispersionstheorie der Ionosphäre.) Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **46**, 37—49 (1935).

The work of the paper referred to above is extended to the case when the ionization is due to a mixture of electrons and ions. The formula for the complex refractive index is found from the equations of motion of the charged particles and discussed so far as it is applicable to measurements of reflection at vertical incidence from the ionosphere in medium geographical latitudes. The zeros and infinities of the refractive index in the absence of friction are found and dispersion curves for various values of the electron/ion ratio are drawn. When friction is present, the critical collision frequencies are deduced from a discussion of the quantity under the square root sign in the dispersion formula and determined graphically; dispersion curves for various electron/ion mixtures are drawn and discussed. The polarization of the waves is found to be determined by the electrons alone. The influence of the ions on propagation and absorption is deduced from the dispersion curves. The physical possibilities of determining the ion content of the ionosphere are shortly discussed. *Slow-Taylor.*

**Försterling, K.:** Über die gegenseitige Beeinflussung zweier elektrischer Wellen in der Heaviside-Schicht. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **45**, 145—148 (1935).

The effect of a strong modulated electromagnetic wave on the collision frequency of electrons in the ionosphere and the consequent production of amplitude variation of a second, originally unmodulated wave (the Luxembourg effect) are theoretically investigated under the assumption of a linear decrease of dielectric constant with height. The differential equation for the electromagnetic vectors is solved. The velocity of the electrons under the influence of the modulated wave is found from their equations of motion and the increase of mean electron velocity is deduced. Formulae for the indices of absorption and refraction and for the absorption of a wave are given. Numerical data show that the observed cross-modulation is to be expected if electrons are the cause of refraction in the lower Heaviside layer. Predictions as to the relative positions of the modulating and modulated emitters are made. *Slow-Taylor.*

**Goubau, Georg:** Zur Dispersionstheorie der Ionosphäre. Hochfrequenztechn. u. Elektroakust. **45**, 179—185 (1935).

The formula for the complex refractive index of an ionized gas under the influence of an external magnetic field is discussed for the case when the ionization is due to electrons only and the Lorentz polarization term has the value zero, for various values of the frequency of collisions between electrons and neutral molecules, and for one value of the angle between the direction of propagation of the waves and the external magnetic field. Dispersion curves are drawn for three typical frequencies and



the deductions to be made from them as to the reflection of the waves are discussed. The influence of the collisions on absorption is estimated and physical conclusions as to the constitution of the Kennelly-Heaviside region are drawn. *M. Slow-Taylor.*

## Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

**Ansel, E. A.: Massenanziehung begrenzter homogener Körper von rechteckigem Querschnitt und des Kreiszylinders.** Beitr. angew. Geophys. 5, 263—295 (1935).

Das Gravitationsfeld eines homogenen Parallelepipedons wird in geschlossener Form angegeben und nach Potenzreihen entwickelt. Das Anwendungsbeispiel (Einfluß magmatischer Differentiation längs eines schmalen Streifens, der sich ins Unendliche erstreckt) bezieht sich jedoch nur auf das „ebene Problem“, das wesentlich einfacher ist und in der angewandten Geophysik viel verwendet wird. Ferner wird für einen homogenen Kreiszylinder begrenzter Länge die Komponente der Anziehung parallel zur Zylinderachse berechnet; Anwendung: Schwereanomalie über einem Salzdom.

*J. Bartels* (Eberswalde).

**Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology.** January, February, March, 1935. Publ. Dominion Observ. Ottawa 12, 97—114 (1935).

**Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology.** April, May, June, 1935. Publ. Dominion Observ. Ottawa 12, 117—138 (1935).

**Hodgson, Ernest A.: Bibliography of seismology.** July, August, September, 1935. Publ. Dominion Observ. Ottawa 12, 141—156 (1935).

**Gutenberg, B., and C. F. Richter: On seismic waves.** Gerlands Beitr. Geophys. 43, 56—133 (1934).

**Sezawa, Katsutada: Growth and decay of seiches in an epicontinental sea.** Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo 13, 476—482 (1935).

Es wird angenommen, daß epikontinentale und Tiefsee gleichförmige Tiefen haben. Die Bewegung wird als zweidimensional behandelt, die Wellen als lang vorausgesetzt. Die Grenzbedingungen verlangen, daß an der Grenze zwischen epikontinentaler und Tiefsee die vertikalen Verrückungen, genauer die Summe von einfallender und reflektierter Welle, gleich sind und die horizontalen Verrückungen sich aus Kontinuitätsgründen umgekehrt wie die Tiefen von epikontinentaler und Tiefsee verhalten. Im Falle der Resonanz verschwindet die vertikale Komponente an der Grenze zwischen Flach- und Tiefsee bei erzwungenen Schwingungen. Freie Schwingungen in der Flachsee nehmen um so langsamer ab, je größer die Differenz zwischen Flach- und Tiefsee ist. Unter dem Einfluß einer Störung wachsen Seiches verhältnismäßig schnell zu stationären Schwingungen an, besonders im Resonanzfalle. Schließlich werden beobachtete und berechnete Perioden und logarithmische Dekremente für einige Orte an der japanischen Küste einander gegenübergestellt.

*Haurwitz* (Toronto, Ont.).

**Raab: Photogrammetrische Bezugnetze auf Grund von Wechselschnitten an schiefen Kreiskegeln und mit Hilfe von Geradenbüscheln.** Bildmessg u. Luftbildwes. 10, 191 bis 202 (1935).

Wenn zwei Ebenen projektiv aufeinander bezogen sind, wie dies — ein ebenes Objekt vorausgesetzt — bei Bild- und Objekzebene (Karte) der Fall ist, so gibt es für jede Lage der Bild- zur Objekzebene Kreisscharen, die einander perspektiv zugeordnet sind. Der Winkel zwischen beiden Ebenen ist

$$l = \arctg \frac{a+r}{f} + \arctg \frac{a-r}{f},$$

wenn z. B. in der Bildebene  $a$  der gegebene Abstand des Kreismittelpunkts vom Bildhauptpunkt  $H'$ ,  $r$  der Kreisradius und  $f$  die Bildweite ist. Ist  $a = r$ , so entsteht eine Schar von Kreisen, die sich sämtlich in  $H'$  berühren. Der Abstand  $a$  und der Kreisradius  $r$  bestimmt dann den Neigungswinkel  $l$  der beiden Ebenen. — Wenn  $r = 0$



ist, wird  $a = f \cdot \operatorname{tg} \frac{l}{2}$ , d. h. bei festem  $l$  sind die Zentralpunkte der perspektiv zugeordneten Kreisbüschel die Fokalphunkte, die Träger von winkeltreuen Strahlenbüscheln in beiden Ebenen sind. — Die Bildkreise können auch durch die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit einer durch den Fokalphunkt gehenden Geraden ersetzt werden. Man erhält dann geradlinige Bezugsnetze. Am einfachsten werden diese Netze, wenn die Kreistangenten parallel zur Spur von Bild- und Objektebene werden. — Den beiden kongruenten, ein Netz bildenden Strahlenbüscheln, deren Zentren die beiden Fokalphunkte der Bildebene sind, entsprechen kongruente Strahlenbüschel und ein kongruentes Netz der Objektebene. — Auf Grund der angedeuteten Verhältnisse wird die Konstruktion einiger Bezugsnetze erläutert, wobei vorausgesetzt ist, daß der Winkel zwischen Bild- und Objektebene sowie die Richtung ihrer Spurparallelen bekannt sind. Es handelt sich praktisch um graphische Entzerrungsmethoden, von denen in der Architekturphotogrammetrie Gebrauch gemacht werden kann. *Finsterwalder.*

### Meteorologie:

**Haurwitz, B.:** On the change of wind with elevation under the influence of viscosity in curved air currents. Gerlands Beitr. Geophys. 45, 243—267 (1935).

Das bisher nur für geradlinige Isobaren behandelte Problem der Windänderung mit der Höhe ( $z$ ) untersucht der Verf. als erster für den Fall kreisförmiger Isobaren (Radius =  $r$ ). Die komplexe Bewegungsgleichung

$$\frac{w^2}{r} + 2\omega i w = -\frac{k}{\rho} r + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (1)$$

( $r, \vartheta, z$  = Zylinderkoordinaten,  $w = v_r + i v_\vartheta$ ;  $\omega = 2\pi/\text{Pendeltag}$ ;  $\rho, p, \nu$  = Dichte, Druck, kinemat. Zähigkeit) ist dann wegen der Zentrifugalkraft nicht linear; (1) gibt unter den Annahmen ( $k = \text{konst.}$ )

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{k}{\rho} r; \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{w}{r}, \quad \text{d. h. } w = f(z) \cdot r.$$

Es läßt sich dann mit  $u(\zeta) = f(\zeta) + i\omega(\zeta = z/\sqrt{\nu})$  aus Gl. (1)

$$\left(\frac{dw}{d\zeta}\right)^2 = 4u^3 - g_2 u - g_3 \quad (2)$$

die Weierstraßsche Normalform für ein elliptisches Integral 1. Gattung ableiten, worin ( $e_1, e_2, e_3$  = Wurzeln von  $du/d\zeta = 0$ ):

$$g_2 = -4(e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3) = -\frac{1}{3}(\omega^2 + k/\rho),$$

$$g_3 = 4e_1 e_2 e_3 = \frac{4}{3}i\omega^2 + 2ik\omega/\rho - c,$$

$$0 = e_1 + e_2 + e_3$$

( $c$  = erste Integrationskonstante). Verf. zeigt (durch Übergang von der W.-Umkehrfunktion zu den Thetafunktionen), daß  $e_2 = e_3 = -e_1/2$  gesetzt werden muß, um eine für wachsendes  $z$  beschränkt bleibende Lösung  $w$  zu erhalten, weshalb folgende Darstellung (mittels trigonometrischer Funktionen) möglich wird:

$$\frac{w}{r} = f(\zeta) = i\sqrt{\omega^2 + k/\rho} \left\{ 1 - 3 \sin^{-2} \left[ \left( \frac{1-i}{2} \right) \sqrt{\omega^2 + k/\rho} (\zeta + C) \right] \right\} - i\omega. \quad (3)$$

Die (zweite) Integrationskonstante  $C$  wird aus der Grenzbedingung  $w_{\zeta=0} = 0$  (1. Fall, verschwindender Bodenwind) oder aus  $w_{\zeta=0} = \kappa(dw/d\zeta)_{\zeta=0}$  (2. Fall, Tangentialdruck proportional Bodenwind) bestimmt. In beiden Fällen zeigen die durchgerechneten Beispiele, daß bei (zyklonal) gekrümmten Isobaren der Wind weit rascher gegen den Gradientenwind konvergiert als bei geradlinigen Isobaren; die Unterschiede sind beträchtlich. — Abschließend gibt Verf. eine approximative Rechnung auf Grund der Bjerknessschen Störungsgleichungen, deren numerische Resultate mit der strengen Rechnung hinreichend übereinstimmen. — Es beweist diese wertvolle Arbeit, daß die Berücksichtigung der Isobarenkrümmung genau so wichtig, ja vielleicht noch wichtiger ist als die Berücksichtigung der Variabilität der kinemat. Zähigkeit mit der Höhe.

*H. Ertel (Berlin).*



**Namekawa, Tadao:** A study of the minor fluctuation of the atmospheric pressure. I. Mem. Coll. Sci. Kyoto A 17, 405—430 (1934).

Zur Erklärung der kurzperiodischen, im Mikrobarogramm aufgezeichneten Luftdruckschwankungen, die zwischen einigen Minuten und einer Stunde liegen, dienen in der Hauptsache zwei Theorien. Die ältere sieht in solchen Luftdruckschwankungen Gravitationswellen längs Unstetigkeitsflächen (Helmholtz-Wiensehe Formel. S.-B. preuß. Akad. Wiss. 1888, 1889), die neuere, von D. Brunt stammende (Quart. J. Roy. Soc. 1927), erklärt sie durch Schwingungen, welche die Temperaturdifferenz adiabatisch unter stabilen Verhältnissen vertikal verschobener Teilchen gegen ihre Umgebung hervorruft. Dem Gedankengang Lambs (Proc. Roy. Met. Soc. London Serie A 1911) folgend, leitet Verf. eine einfachere, eine Näherungslösung darstellende Formel für die Schwerewellen längs Unstetigkeitsflächen ab, als sie die Ausführungen Lambs liefern. Die Diskussion erstreckt sich auf eine große Zahl von Einzelfällen. Es zeigt sich dabei, daß die gefundenen Lösungen hinsichtlich Amplitude, Periode und Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit den im Mikrobarogramm registrierten periodischen Druckschwankungen recht gut übereinstimmen, was zwei Beispiele ausgewerteter Mikrobarogramme in Gegenüberstellung zu den theoretisch gefundenen Werten beweisen. Die vom Verf. aufgestellte Theorie umfaßt in der modifizierten Form der Helmholtz-Wiensen Gleichung auch die Bruntschen einfachen Vertikalschwingungen, sie ergibt als Resultat also die Synthese der beiden eingangs erwähnten Theorien von Helmholtz und Brunt zur Erklärung der im Mikrobarogramm registrierten kurzperiodischen Druckschwankungen.

Horst Philipps (Frankfurt a. M.).

**Ertel, Hans, und Sjan-zi Li:** Die Berechnung der Advektion. Meteorol. Z. 52, 356—357 (1935).

In einer Formel von Rossby zur Berechnung der Advektion in verschiedenen Höhengichten wird ein Fehler nachgewiesen, der dadurch entstand, daß Rossby den gesamten nicht auf adiabatische Wirkungen zurückführbaren Teil der Dichteänderungen als advektiv ansah. Indessen ist diese Annahme nur am Erdboden richtig. In jeder anderen Höhe wird ein Volumenelement nicht allein infolge der Dichteänderungen der darüberliegenden Schichten verschoben, sondern seine untere Grenze erleidet auch noch eine Verschiebung infolge der Dichteänderung in dem Element selbst. Es zeigt sich, daß die unbefriedigend großen Advektionswerte für die höheren Schichten, die sich mit Rossbys Formel ergeben, mit der neuen Formel wesentlich geringer werden.

B. Haurwitz (Toronto, Ontario).

**Hartung, Karl:** Die Wiedergabe periodischer Druckschwankungen auf gemittelten Isallobarenkarten. Ann. Hydrogr. 63, 421—429 (1935).

Verf. gibt ein Verfahren der Druckmittelung von Isobarenkarten an und erhält dadurch geglättete Druckänderungskarten. Die Hauptuntersuchung gilt dabei der Frage, ob durch diese Glättung wirklich im Druckgang vorhandene Perioden sich auch auf den geglätteten Druckänderungskarten zeigen und wie stark der Einfluß der Glättung auf die Veränderung der Amplitude ist. Es zeigt sich, daß die Glättung allgemein eine Verminderung der Amplitude der isallobarischen Gebilde zur Folge hat, jedoch in sehr verschiedener Weise, in Abhängigkeit nämlich von der Wahl der zu einer Mittelbildung herangezogenen Ordinaten und des äquidistanten Beobachtungsabstandes. So werden bei viertägiger Mittelbildung die Amplituden der 7—23 tägigen Wellen um weniger als die Hälfte herabgesetzt, dagegen erscheinen Perioden von weniger als 5,5 Tagen mit einer um mehr als  $\frac{2}{3}$  kleineren Amplitude. Die für die Großwetterlage bestimmenden und häufig sehr gut ausgeprägten Perioden von 6—8 Tagen und längerer Dauer werden von der durch die Glättung verursachten Amplitudenverminderung nicht allzusehr betroffen, auch Zuggeschwindigkeit und Fortpflanzungsrichtung lassen sich bei einer Intervalllänge von 2 Tagen genügend genau wiedergeben. Jedenfalls scheint das Verfahren der übergreifenden Mittelbildung, angewendet auf 96stündige Druckdifferenzmittel, für die Diagnose länger periodischer Druckwellen brauchbar zu sein. Zu beachten ist die Wahl des Beobachtungsabstandes, der bei ungünstiger Festsetzung nicht im Druckgang vorhandene Perioden vortäuschen und zu einer falschen Beurteilung der Zugrichtung der isallobarischen Gebilde führen kann.

Horst Philipps (Frankfurt a. M.).